Uma Introdução à Topologia e aos Espaços Métricos

Ivan Gomes Gouveia Filho [1], Pammella Queiroz de Souza [2]

RESUMO

Este trabalho é um resumo das atividades exercidas pelo bolsista no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica(PIBIC/CNPq/UFCG) nos meses de setembro de 2021 a agosto de 2022. Serão aqui exibidos: uma exposição introdutória do projeto, metodologia, o conteúdo pesquisado e desenvolvido e informações de toda bibliografia utilizada. O projeto foi dividido em duas etapas, a primeira delas foi estudar a topologia e os espaços métricos, para isto o bolsista inicialmente estudou toda a teoria de conjuntos para que estivesse apto a compreender tais conteúdos. A segunda etapa do projeto foi feita de forma intuitiva, nesta etapa o conteúdo de topologia foi vista sem um grande rigor matemático, como uma área da geometria não euclidiana e qualitativa, isto é, que não leva em consideração conteúdos como ângulos, distância entre pontos e etc. Nesta etapa, estudou-se como surgiu a topologia, o que é uma transformação topológica, o que são Figuras topologicamente equivalentes, foram feitos vários exercícios envolvendo a topologia e o principal que foi compreender e defender a importância de ensinar a topologia nas escolas.

Palavras-chave: Topologia; Espaços Métricos; Ensino da Topologia.

[1] Aluno do Bacharelado em Matemática, Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: ivangomes@$hotmail.com.br$

[2] Doutora, Professora, Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: pammellaqueiroz@mat.ufcg.edu.br

Uma Introdução à Topologia e aos Espaços Métricos

ABSTRACT

This work is a summary of the activities carried out by the scholarship holder in the Institutional Program for Scientific Initiation Scholarships (PIBIC/CNPq/UFCG) from September 2021 to August 2022. The following will be shown: an introductory exhibition of the project, methodology, content researched and developed and information from all the bibliography used. The project was divided into two stages, the first of which was to study the topology and metric spaces, for this the grantee initially studied the whole theory of sets so that he was able to understand such contents. The second stage of the project was done intuitively, in this stage the topology content was seen without great mathematical rigor, as an area of non-Euclidean and qualitative geometry, that is, it does not take into account contents such as angles, distance between points and etc. In this stage, we studied how topology emerged, what is a topological transformation, what are topologically equivalent figures, several exercises involving topology were carried out and the main one was to understand and defend the importance of teaching topology in schools.

Keywords: Topology; Metric Spaces; Topology Teaching.

INTRODUÇÃO

Em matemática, o espaço métrico mais familiar é o espaço euclidiano. Na verdade, a métrica é uma generalização das quatro propriedades conhecidas da distância euclidiana. Um Espaço Métrico é um conjunto onde as distâncias entre quaisquer de seus elementos são definidas e, a partir daí, podemos estudar propriedades topológicas, como conjuntos abertos e fechados, que levam ao estudo de espaços topológicos mais abstratos. Como mencionado anteriormente, faremos um estudo introdutório de resultados e definições básicas de topologia e, a posteriori, tendo em vista que muitos conceitos topológicos são introduzidos disfarçadamente no ensino básico, abordaremos alguns métodos educacionais e mostrar que conteúdos como topologia podem ser ensinados nas escolas de ensino básico.

Topologia (do grego. topos, “lugar”, e logos, “estudo”) é um ramo da matemática relativamente novo que surgiu como uma espécie de extensão da geometria, mas tem alcançado muitos outros campos da matemática. A palavra topologia é usada para descrever área de estudos para designar uma família de conjuntos (conjuntos abertos) assim como para definir o conceito básico da teoria, o espaço topológico. É também chamada geometria de borracha, pois estuda transformações contínuas onde comprimento, ângulos e formas podem ser alterados por transformações contínuas e reversíveis, onde as propriedades de posição não são afetadas por mudanças de tamanho e forma, quando movidos. Em resumo, pode-se entender a Topologia como o estudo das propriedades geométricas que permanecem inalteradas.

Portanto, o intuito do artigo, como já explanado no projeto, é estudar algumas definições e resultados introdutórios desta teoria, dando ênfase também a uma abordagem educacional, pois os alunos sentem dificuldades em associar novos conceitos a conteúdos previamente já vistos. O estudo de topologia e espaços métricos será feito, em certo momento, em simultâneo com estudo de textos de educadores da matemática a fim de subsidiar a base teórica em ambas as vias do trabalho, tanto a matemática pura, quanto o ensino de matemática.

MATERIAIS E MÉTODOS (OU METODOLOGIA)

Para atingir os objetivos almejados, foram feitas exposições semanais por meio da apresentação e discussão dos conteúdos. Durante os meses de setembro de 2021 a abril de 2022, devido a pandemia provocada pelo vírus da COVID-19, todas as reuniões semanais foram feitas na modalidade síncrona por meio do GoogleMeet.

A partir do mês de maio de 2022, com o plano de retomada das atividades presenciais, fizemos um replanejamento para que nossas atividades acontecessem na forma presencial, assim, as reuniões foram feitas semanalmente de forma presencial na UAMat até o final do projeto que ocorreu no mês de agosto de 2022.

Todo o conteúdo programado para ser estudado durante a vigência deste projeto foi concluído. Além disso, no decorrer do projeto, o discente fez leitura de textos complementares acerca de métodos de ensino com intuito de tornar o conteúdo mais inteligível e atrativo, para alunos das disciplinas iniciais da graduação com intuito de ampliar seus conhecimentos, dar suporte ao andamento do projeto e direcionar aos objetos previamente estabelecidos. A viabilidade da proposta foi, de fato, factível uma vez que tratamos do estudo de um tema básico e introdutório para os alunos que pretendem seguir carreira acadêmica.

DESENVOLVIMENTO

1 CAPÍTULO 1: CONJUNTOS - NÚMEROS REAIS

INTRODUÇÃO

Por volta de 1870 o matemático Georg Cantor estudava o problema da representação das funções reais por meio de séries trigonométricas. Uma das questões a que se dedicava era a de estender a unicidade da representação a funções dotadas de “infinitos"pontos singulares. Foi assim, indiretamente portanto, que a atenção de Cantor se encaminhou no sentido de diversas questões ligadas a conjuntos infinitos. E suas pesquisas e contribuições a respeito vieram a se constituir na base da teoria dos conjuntos como disciplina matemática independente.

1.1 CONCEITO DE CONJUNTO

O conceito de conjunto certamente é o mais importante dos conceitos básicos da matemática moderna. Quando nos referimos a um conjunto estamos via-de-regra pensando em alguns objetos que, por um motivo ou outro, nos convém situar coletivamente. Não há restrições quanto a como deve ser esses objetos salvo que excluiremos a hipótese, que seria aliás bastante inusitada do ponto de vista intuitivo, de um conjunto fazer parte, como membro, dele próprio. Assim, não há nenhum inconveniente em se pensar num conjunto formado por um número real, uma bola de futebol e um automóvel.

Certos conjuntos, pela sua importância e pela frequência com que se repetem, são indicados por notações especiais:

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais;

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros;

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais;

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais;

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos.

De um modo geral os conjuntos são indicados por letras maiúsculas de nosso alfabeto ao passo que os objetos ou membros de um conjunto por letras minúsculas, também do nosso alfabeto.

Os objetos de um conjunto além de membros desse conjunto são chamados em geral de elementos do conjunto. Se B é um conjunto e x é um elemento de B, indicaremos este fato por x $\in$ B o que será lido por "x pertence a B". Se x não é um elemento de B então dizemos que "x não pertence a B" e simbolizamos isto por "x $\notin$ B".

Há duas maneiras usuais de se indicar um conjunto. Sempre que possível ou praticável podemos escrever seus elementos entre chaves como por exemplo: $\{0, 1, 2\}$ é o conjunto dos três primeiros números naturais, $\{0, 2, 4, 6, ...\}$ é o conjunto dos números pares. Há casos em que tal processo não é prático ou não possível. Para estes dizemos que B é o conjunto dos elementos do conjunto A que gozam da propriedade P. A notação usada neste caso é a seguinte:

$$B = \{x \in A/\ P\}\,.$$

Por exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x \notin \mathbb{Q}\}\,,$$

que é o conjunto dos números reais que não são racionais.

Consideremos o caso em que nenhum elemento de um conjunto A possua uma dada propriedade P. Por exemplo:

$A = \{x \in \mathbb{R}/\ x^2 = -1\}$. Em qualquer caso como este, o conjunto A, cuja existência estamos aceitando, chama-se conjunto vazio e é indicado pelo símbolo $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Dois conjuntos se dizem iguais se constam exatamente dos mesmo elementos, isto é, se todo elemento de um também é elemento do outro e vice-versa. Assim, são iguais, por exemplo, o conjunto das vogais de nosso alfabeto e o conjunto das vogais do alfabeto da língua inglesa. O símbolo para indicar a igualdade de conjuntos é o usual, isto é, $=$. Se todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B dizemos que A está contido em B e escrevemos $A \subset B$. É claro que vale a equivalência:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B\ e\ B \subset A.$$

A relação assim introduzida e que se expressa pelo símbolo $\subset$ tem as seguintes propriedades:

i) Para todo conjunto A, $A \subset A$ (reflexiva);

ii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (anti-simétrica);

iii) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (transitiva).

Se $A \subset B$ dizemos que A é um subconjunto de B.

O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A é chamado das partes de A e é indicado por $P(A)$. Se A é um subconjunto de B tal que $A \neq B$, então dizemos que A é um subconjunto próprio de B e a notação com que se indica este tipo de inclusão é $\subseteq$.

Ainda nesta linha de ideias, se A é um conjunto não vazio e a $\in$ A, então existe $B = \{x \in A \;/\; x = a\}$.

Este conjunto B é um conjunto unitário que também é indicado por $B = \{a\}$.

1.2 UNIÃO-INTERSECÇÃO-COMPLEMENTAÇÃO

a) Sejam A e B subconjuntos de um dado conjunto U. A união de A com B é o subconjunto de U, indicado por $A \cup B$, assim determinado:

$$A \cup B = \{x \in U / \; x \in A \; ou \; x \in B\} .$$

A operação de formar uniões de subconjuntos de um dado conjunto U tem as seguintes propriedades:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ para quaisquer $A, B, C \subset U$ (associativa);
- $A \cup B = B \cup A$, para qualquer $A, B \subset U$ (comutativa);
- $A \cup \emptyset = A$, para qualquer $A \subset U$;
- $A \cup U = U$, para qualquer $A \subset U$;
- $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$, para quaisquer $A, B \subset U$.

Vejamos como se justifica o último ítem.

$\Rightarrow$) Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$ e como $A \cup B = B$(hipótese) conclui-se que $x \in B$, ou seja, $A \subset B$.

$\Leftarrow$) De imediato temos que $B \subset A \cup B$. Agora tome um $x \in A \cup B$, temos que $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in B$ segue que $A \cup B \subset B$. Por outro lado, se $x \in A$ e como $A \subset B$(hipótese) segue que $x \in B$, ou seja, $A \cup B \subset B$. Segue por dupla inclusão que $A \cup B = B$.

b) Dados dois subconjuntos A e B de um conjunto U, a intersecção de A com B, que indicaremos por $A \cap B$, é o seguinte subconjunto de U:

$$A \cap B = \{x \in U/\ x \in A\ e\ x \in B\}\,.$$

Para a operação de obter intersecções a partir de subconjuntos de U valem as seguintes propriedades:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, para quaisquer $A, B, C \subset U$;
- $A \cap B = B \cap A$, para quaisquer $A, B \subset U$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, para qualquer $A \subset U$;
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, para quaisquer $A, B \subset U$.

Nota: As operações de união e intersecção estão relacionadas através das propriedades distributivas que passamos a enunciar:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

para quaisquer $A, B, C \subset U$.

c) Para cada subconjunto $A \subset U$, indica-se por $C_U A$ e chama-se complementar de A em relação a U, o seguinte subconjunto de U:

$C_U A = \{x \in U/\ x \notin A\}\,;$.

Por exemplo, se $U = \mathbb{Z}$ e $A = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$, então $C_U A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}\,.$

Outra notação para complementar: A^C.

Dados dois subconjuntos A e B de um dado conjunto U, a diferença entre A e B, que se denota por $A - B$, é definida por:

$$A - B = \{x \in U/\ x \in A\ e\ x \notin B\}\,.$$

Evidentemente $A - B = A \cap B^C$.

Vejamos as propriedades envolvendo complementares e diferenças(para subconjuntos de um dado conjunto U):

- $\emptyset^C = U\ e\ U^C = \emptyset$;
- $(A^C)^C = A$;
- $A \cap A^C = \emptyset\ e\ A \cup A^C = U$;

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ e $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
- Se A e B são subconjuntos de U tais que $A \subset B$, então $C_B A = A^C \cap B$.

1.3 PRODUTOS CARTESIANOS DE CONJUNTOS

Para cada par de conjuntos A e B admitiremos a existência do conjunto $A \times B$, chamado produto cartesiano de A por B, cujos elementos são os pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$. O conceito de par ordenado é tomado aqui como primitivo, admitindo-se que, para quaisquer $(a, b), (c, d) \in A \times B$,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ } e \text{ } b = d.$$

Assim:

$$A \times B = \{(a, b)/ \ a \in A \text{ } e \text{ } b \in B\}.$$

O produto de três conjuntos A,B e C se define como:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

e o produto de n conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ $(n \geq 2)$ é definido de maneira análoga por indução, do seguinte modo:

$$E_1 \times ... \times E_n = (E_1 \times ... \times E_{n-1}) \times E_n.$$

Um elemento $x \in E_1 \times ... \times E_n$ será indicado simplesmente por $x = (x_1, ..., x_n)$. com cada $x_i \in E_i$ e $1 \leq i \leq n$.

Sejam $E_1 \times ... \times E_n$ subconjuntos quaisquer. Para cada índice i$(1 \leq i \leq n)$ sejam A_i e B_i subconjuntos quaisquer de E_i. Vale então o seguinte:

- $A_1 \times ... \times A_n = \emptyset \Leftrightarrow$ Existe um índice i, $1 \leq i \leq n$, de modo que $A_i = \emptyset$;
- Se $A_1 \times ... \times A_n \neq \emptyset$, então $A_1 \times ... \times A_n \subset B_1 \times ... \times B_n \Leftrightarrow A_1 \subset B_1, \ ... \ , A_n \subset B_n$;
- $(A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n)$.

A verificação desta última propriedade, por exemplo se faz do seguinte modo:

$\Rightarrow)$ Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in (A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... \times B_n)$. Então $x \in A_1 \times ... \times A_n$ e $x \in B_1 \times ... \times B_n$ o que significa que, para cada índice i, $1 \leq i \leq n$, valem as relações $x_i \in A_i$ e $x_i \in B_i$, donde $x_i \in A_i \cap B_i$ para todo índice i. Consequentemente $x \in (A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n)$ e fica provado que $(A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... X\ B_n) \subset (A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n)$.

$\Leftarrow$) Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in (A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n)$. Então para cada índice i com $1 \leq i \leq n$, tem-se que $x_i \in A_i \cap B_i$, ou seja, $x_i \in A_i$ e $x_i \in B_i$. Consequentemente, $x \in A_1 \times ... \times A_n$ e $x \in B_1 \times ... \times B_n$. Portanto, temos que $x \in (A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... \times B_n)$, provando assim que $(A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n) \subset (A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... \times B_n)$ e por dupla inclusão segue que:

$$(A_1 \cap B_1) \times ... \times (A_n \cap B_n) = (A_1 \times ... \times A_n) \cap (B_1 \times ... \times B_n)$$

1.4 RELAÇÕES BINÁRIAS

Definição 1.4.1. *Uma relação binária do conjunto A no conjunto B é qualquer subconjunto de $A \times B$, ou seja,*

(R é relação binária de A em B) $\Leftrightarrow R \subset A \times B.$

Exemplo: Se $A = \{0, 1\}\ e\ B = \{2, 3, 4\}$, então:

$$A \times B = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$$

e, por exemplo, $R = \{(0, 3)\}\ e\ T = \{(0, 2), (1, 2), (1, 3)\}$ são relações binárias de A em B. Observe-se que o número de relações binárias de A em B, neste caso, é 2^6. Em geral, se A tem m elementos e B tem n elementos, 2^{mn} é o número de relações de A em B.

Se R é uma relação de A em B e se $(x, y) \in R$ este fato é indicado comumente por xRy. Naturalmente xRy significa que $(x, y) \in R$.

Uma relação R do conjunto A, no próprio conjunto A, chama-se relação sobre A. Assim:

$$R\ \acute{e}\ rela\c{c}\tilde{a}o\ sobre\ A \Leftrightarrow R \subset A \times A.$$

1.5 FUNÇÕES

a) Vamos indicar em geral por letras minúsculas, quase sempre f, g ou h, os membros da importante classe das relações de um conjunto A num conjunto B, chamadas funções, assim definidas: "$f \subset A \times B$ é uma função de A em B, se para cada $x \in A$, existe um único $y \in B$ de maneira que xfy."

Para indicarmos que f é uma função de A em B a notação normalmente usada é:

$$f : A \to B$$

e, neste caso, ao invés de xfy usa-se $y = f(x)$ para significar que $(x, y) \in f$. Se $y = f(x)$ dizemos que y é imagem de x por f.

Para toda função $f : A \to B$ o conjunto A é chamado de domínio de f, ao passo que B é o seu contradomínio. O conjunto imagem é chamado imagem de f e é indicado por $Im(f)$:

$$Im(f) = \{f(x)/\ x \in A\}.$$

Exemplo 1.5.1. *Se* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{4, 5\}$*, então* $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$ *é função de A em B e* $Im(f) = B$*.*

Uma função $f : A \to B$ se diz injetora se, para quaisquer $x, y \in A$,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

ou equivalente

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Diz-se que uma aplicação $f : A \to B$ é sobrejetora se $Im(f) = B$, ou seja, se para todo $y \in B$ existe $x \in A$ de maneira que $f(x) = y$.

Uma função $f : A \to B$ ao mesmo tempo injetora e sobrejetora chama-se bijetora.

Da própria definição de função decorre o conceito de igualdade de duas funções: dadas $f : A \to B$ e $g : A \to B$, $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.

b) Seja X um subconjunto de um conjunto A. A aplicação $j : X \to A$, definida por $j(x) = x$, para todo $x \in X$, chama-se inclusão de X em A. No caso particular de $X = A$ esta aplicação chama-se aplicação idêntica de A e é indicada por id_A. Assim:

$$id_A : A \to A$$

e $id_A(x) = x$, para todo $x \in A$.

Seja $f : A \to B$ uma aplicação qualquer. Para todo $X \subset A$ fica definida a restrição de f ao conjunto A que é a aplicação indicada por f/X assim definida:

$$f/X : X \to B$$

e $(f/X)(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Por exemplo, se $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}, f = \{(1, 2), (2, 4)\}$ e $X = \{2\}$, então $f/X = \{(2, 4)\}$.

c) Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a função composta f e g é a função, denotada por gof,

$$gof : A \to C,$$

definida de maneira que $(gof)(x) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = x - 1$, então $gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função tal que $(gof)(x) = g(x^2) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para funções qualquer $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ temos que $ho(gof) = (hog)of$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injetoras(sobrejetoras), então $gof : A \to C$ é também injetora(sobrejetora).

Provemos então a segunda parte do que afirmamos. Então estamos supondo que f e g são sobrejetoras. Dado $z \in C$, existe $y \in B$ de modo que $g(y) = z$. E, ainda devido a hipótese, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Donde $g(f(x)) = (gof)(x) = z$. Como consequência desses fatos resulta que se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijetoras o mesmo ocorre com gof.

Dada uma função $f : A \to B$, se existir $g : B \to A$ tal que $gof = id_A$ e $fog = id_B$, então g é chamada inversa de f. A notação usual para a inversa de f é f^{-1}.

Proposição 1.5.1. *Para que exista a inversa de uma função $f : A \to B$ é necessário e suficiente que f seja bijetora.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponhamos que $g : B \to A$ é a função inversa de f, $x, y \in A$ e $f(x) = f(y)$. Daí $g(f(x)) = g(f(y))$, isto é, $gof(x) = gof(y)$ e como $gof = id_A$ então $x = y$. Provamos então que f é injetora. Por outro lado, dado $b \in B$ como $fog = id_B$, então $(fog)(b) = b$, o que é o mesmo que $f(g(b)) = b$. Mas $g(b) \in A$ e, portanto, dado $b \in B$, existe $a = g(b) \in A$ tal que $f(a) = b$, o que prova que f é sobrejetora.

$\Leftarrow$) Como por hipótese f é bijetora a relação $g = \{(y, x) \in B \ X \ A / \ (x, y) \in f\}$ é uma função de B em A. De fato, dizer que f é bijetora significa que para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$ o que equivale a $(x, y) \in f$ e daí $(y, x) \in g$.

Assim temos:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$$

e portanto, $\forall \ x \in A$, $(gof)(x) = g(f(x)) = x$ o que mostra que $gof = id_A$. Analogamente $f0g = id_B$.

Se f é bijetora então f^{-1} também é bijetora e que $(f^{-1})^{-1} = f$. □

Se a aplicação $f : A \to B$ é bijetora, em resumo:

$$f^{-1} : B \to A$$

e $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, caracterizam f^{-1}.

d) Consideremos uma função $f : A \to B$. Dado um subconjunto $X \subset A$ chama-se imagem direta de X por f, e indica-se por $f(X)$, o seguinte subconjunto de B:

$$f(X) = \{f(x)/\ x \in X\}.$$

Por exemplo, se a função é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e se $X = \{-a, a\}$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, então $f(X) = \{a^2\}$, ao passo que se $X = \{x \in \mathbb{R}/ -a \leq x \leq a\}$, onde $a \geq 0$, então $f(X) = \{x \in \mathbb{R}/\ 0 \leq x \leq a^2\}$.

e) Consideremos $f : A \to B$. Para qualquer $E \subset B$, a imagem inversa de E por f, indicada por $f^{-1}(E)$, é o subconjunto:

$$f^{-1}(E) = \{x \in A/\ f(x) \in E\}.$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = x^2$ e se $E = \{x \in \mathbb{R}/\ 1 \leq x \leq 2\}$, então $f^{-1}(E) = \left\{x \in \mathbb{R}/ -\sqrt{2} \leq x \leq -1\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}/\ 1 \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$.

1.6 CONJUNTO FINITO

Seja $n \in \mathbb{N}$ e defina:

$$I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}.$$

Dizemos que um conjunto X é finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção:

$$\varphi : I_n \to X.$$

Neste caso, o conjunto X tem n elementos.

Por exemplo: O conjunto $M = \{m, a, t, e, i, c\}$ é finito pois a função $\varphi : I_6 \to M$, dada por $\varphi_1 = m, \varphi_2 = a, ..., \varphi_6 = c$ é uma bijeção.

1.7 CONJUNTO INFINITO

Um conjunto X é infinito quando não é finito. Isto é, $X \neq \emptyset$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$ não existe bijeção de $\varphi : I_n \to X$.

Por exemplo: O conjunto dos números naturais é infinito. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ e considere $\varphi : I_n \to \mathbb{N}$. Temos que $\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n) \in \mathbb{N}$. Consequentemente $p = \varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n) \in \mathbb{N}$, no entanto, $p \notin \varphi(I_n)$ pois $p > \varphi(x)$ para todo $x \in I_n$. Isso mostra que φ não é sobrejetiva. Portanto φ não é uma bijeção e $\mathbb{N}$ não é finito.

1.8 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção:

$$\varphi : \mathbb{N} \to X.$$

Neste caso dizemos que X é infinito enumerável.

Por exemplo: O conjunto dos números naturais é enumerável. Basta observar que a função :

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

definida por $\varphi(n) = n$ é uma função bijetiva.

Outro exemplo: O conjunto $2\mathbb{N} = \{x = 2n/\ n \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, ...\}$ é enumerável.

Para este exemplo considere a função:

$$\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$

$$n \to \varphi(n) = 2n$$

e conclua que $2\mathbb{N}$ é enumerável.

Observação 1.8.1. *É imediato ver que* $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ *onde* $\mathbb{N}$ *é enumerável, na verdade todo subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é enumerável.*

a) *Seja* $f : X \to Y$ *uma função injetiva. Se Y é enumerável então X é enumerável.*

b) *Seja* $f : X \to Y$ *uma função sobrejetiva. Se X é enumerável então Y é enumerável.*

Demonstração. Com efeito, para cada $y \in Y$ podemos escrever um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$ já que f é sobrejetiva. Isto define uma aplicação:

$$g : Y \to X$$

$$y \to g(y) = x$$

tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Segue daí que g é injetiva pois $g(y_1) = g(y_2)$ implica em $f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$, como X é enumerável, pela letra a tem-se que Y é enumerável. □

c) Prove que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto enumerável.

Demonstração. Considere a aplicação

$$\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(m,n) \to \Phi(m,n) = 2^m.\, 3^n.$$

Note que Φ é injetiva. De fato, dados $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\Phi(m_1, n_1) = \Phi(m_2, n_2) \Rightarrow 2^{m_1}.\, 3^{n_1} = 2^{m_2}.\, 3^{n_2}$, como a decomposição de um número em fatores primos é de forma única segue que:

$(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ e com isso provamos que Φ é injetiva. Note também que $\mathbb{N}$ é enumerável, logo pela letra a segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

d) O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

1.9 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Seja R uma relação sobre um conjunto $A(\Leftrightarrow R \subset A \times A)$. Dizemos que R é uma relação de equivalência sobre A se são válidas as seguintes propriedades:

i) xRx, para todo $x \in A$ (reflexiva);

ii) $xRy \Rightarrow yRx$ (simétrica);

iii) xRy e $yRz \Rightarrow xRz$ (transitiva).

Exemplo 1.9.1. *Se $A = \{1, 2, 3\}$, então $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ é uma relação de equivalência sobre A.*

Exemplo 1.9.2. *Se $A = \mathbb{Z}$, para cada $m > 1$ a relação de congruência definida por:*

$$x \equiv y(mod\ m) \Leftrightarrow m/(y-x)$$

é uma importante relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$.

1.10 RELAÇÕES DE ORDEM

Uma relação σ sobre um conjunto A é chamada relação de ordem sobre A se as seguintes condições se verificam:

i) $x\sigma x,$ para todo $x \in A$(reflexividade);

ii) $x\sigma y$ e $y\sigma x \Rightarrow x = y$(anti-simetria)

iii) $x\sigma y$ e $y\sigma z \Rightarrow x\sigma z$(transitividade).

Exemplo 1.10.1. *Em $\mathbb{R}$ a relação $\leq$ (menor que ou igual) é uma relação de ordem porque*

i) $x \leq x$ é verdadeira, para todo $x \in \mathbb{R}$;

ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$;

iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z.$

1.11 O CORPO $\mathbb{R}$

Considere a adição $(x, y) \to x + y$ e a multiplicação $(x, y) \to xy$ em $\mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades para essas operações:

i) $x + (y + z) = (x + y) + z$,$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

ii) $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

iii) $x + 0 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

iv) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, indicado por $-x$, de maneira que $x + (-x) = 0$

v) $x(yz) = (xy)z,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;

vi) $xy = yx,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

vii) $x1 = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

viii) Para cada $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, existe um elemento em $\mathbb{R}$, indicado por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$;

ix) $x(y + z) = xy + xz,\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}.$

O fato de a adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ gozarem das propriedades acima permitem que nos refiramos ao $\mathbb{R}$ como sendo um corpo, em relação a essas duas operações, conforme designação em Álgebra.

1.12 O CORPO ORDENADO $\mathbb{R}$

Consideremos agora a relação sobre $\mathbb{R}$ definida por “$x \leq y$”(ou também, “$y \geq x$”). As propriedades básicas desta relação são as seguintes:

i) $x \leq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

ii) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$;

iii) dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$;

iv) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se sempre uma das seguintes alternativas: $x \leq y$ ou $y \leq x$;

v) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ para todo $z \in \mathbb{R}$;

vi) dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, então $0 \leq xy$.

As quatro primeiras dessas propriedades caracterizam as chamadas relações de ordem totais. Quanto às duas últimas, expressam o fato de que a relação de ordem "$\leq$ " considerada é compatível com a estrutura do corpo de $\mathbb{R}$. Assim, nos referimos a $\mathbb{R}$ como sendo um corpo ordenado pelo fato de ser um corpo conforme vimos anteriormente, e pelo fato de que a relação "$\leq$ " ser uma relação de ordem sobre $\mathbb{R}$, compatível com a estrutura algébrica $\mathbb{R}$.

1.13 VALOR ABSOLUTO

Seja $x \in \mathbb{R}$. O valor absoluto de x, denotado por $\mid x \mid$, é dado por:

$$\mid x \mid = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, \ se \ x > 0 \\ 0, \ se \ x = 0 \\ -x, \ se \ x < 0 \end{cases}$$

Observação: Temos que $\mid x \mid \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e segue diretamente da definição que $x \leq \mid x \mid$ e $-x \leq \mid x \mid$. Daí:

$$- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid .$$

Teorema 1.13.1. *Sejam $x, a \in \mathbb{R}$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

a) $\mid x \mid \leq \ a$

b) $x \leq a$ e $-x \leq a$

c) $-a \leq x \leq a$.

Demonstração. $a \Rightarrow b$) Se $\mid x \mid \leq a$, então segue que: $x \leq \mid x \mid \leq a$ e $-x \leq \mid x \mid \leq a$.

$b \Rightarrow a$) Se $x \leq a$ e $-x \leq a$, então da definição:

$$\max\{x, -x\} \leq a \Rightarrow \mid x \mid \leq a.$$

$b \Leftrightarrow c$) é imediato. □

Proposição 1.13.2. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então valem:*

a) $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$;

b) $\mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid$;

c) $\mid x \mid^2 = \ x^2$*;*

d) $\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leq \mid x - y \mid$.

Demonstração. Demonstraremos os ítem a), b) e d).

a) Façamos caso a caso. Se x e y são ambos positivos, temos que

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|.$$

Analogamente, se x e y são ambos negativos,

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) = |x|+|y|.$$

Se x ou y é igual a 0, também é óbvia a igualdade. Falta analisarmos o caso em que $x > 0$ e $y < 0$ (o outro caso, em que $x < 0$ e $y > 0$, é totalmente análogo). Se $x + y \geq 0$, temos

$$|x+y| = x+y \leq x = |x| \leq |x|+|y|.$$

b) A demonstração é feita caso a caso. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ temos $x \cdot y \geq 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|.$$

Se $x \geq 0$ e $y < 0$ temos $x \cdot y \leq 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = -(xy) = x(-y) = |x| \cdot |y|.$$

Se $x < 0$ e $y \geq 0$ é análogo. Se $x < 0$ e $y < 0$ temos $xy > 0$ e, portanto,

$$|x \cdot y| = xy = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|.$$

d) Pelo item c tem-se:

$$\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid^2 = (\mid x \mid - \mid y \mid)^2 = \mid x \mid^2 - 2 \mid x \mid\mid y \mid + \mid y \mid^2 \quad (1),$$

como $xy \leq \mid x \mid\mid y \mid$, segue que:

$$-2 \mid x \mid\mid y \mid \leq -2xy \quad (2).$$

Substituindo (2) em (1) temos:

$$\mid x \mid^2 - 2 \mid x \mid\mid y \mid + \mid y \mid^2 \leq \mid x \mid^2 - 2xy + \mid y \mid^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mid x \mid^2 - 2 \mid x \mid\mid y \mid + \mid y \mid^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\mid x \mid - \mid y \mid)^2 \leq (x-y)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid^2 \leq \mid x - y \mid^2 \quad (3).$$

Extraindo a raíz em (3) temos:

$$\mid\mid x \mid - \mid y \mid\mid \leq \mid x - y \mid .$$

□

1.14 INTERVALOS

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Os intervalos são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos abaixo.

I) Limitados com extremos a e b.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x \leq b\}$;
2. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x \leq b\}$;
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x < b\}$;
4. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x < b\}$.

II) Ilimitados.

1. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/ \ x \leq b\}$;
2. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}/ \ x < b\}$;
3. $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}/ \ a \leq x\}$;
4. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}/ \ a < x\}$.

Observação:

$$| \ x - a \ | < \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta).$$

1.15 CONJUNTOS LIMITADOS DE $\mathbb{R}$

1.15.1 Cota Superior

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de X se:

$$x \leq b, \ \forall \ x \in X.$$

Exemplo 1.15.1. *Considere o conjunto* $X_1 = \{x \in \mathbb{Q}/ \ x < 2\} \subset \mathbb{R}$. *Temos que* $b = 2$ *é uma cota superior de* X_1.

Observação 1.15.1. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *que tem cota superior é dito limitado superiormente.*

1.15.2 Supremo

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não vazio. Dizemos que b é o Supremo de X se b é a menor das cotas superiores. A notação para o supremo de um conjunto é $b = supX$.

1.15.3 Cota inferior

Seja $Y \subset \mathbb{R}$. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é uma cota inferior de Y se:

$$a \leq y, \; \forall \, y \in Y.$$

Exemplo: Considere o conjunto $Y_1 = \{y \in \mathbb{Q} / \; y \geq 2\} \subset \mathbb{R}$. Temos que $a = 2$ é uma cota inferior de Y_1.

Observação 1.15.2. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ que tem cota inferior é dito limitado inferiormente.*

Observação 1.15.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado quando é limitado inferiormente e limitado superiormente.*

1.15.4 Ínfimo

Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente e não vazio. Dizemos que a é o Ínfimo de Y se a é a maior das cotas inferiores. A notação para ínfimo de um conjunto é $a = infY$.

1.15.5 Corpo ordenado completo

No que segue $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado. Um corpo ordenado $\mathbb{K}$ é completo quando todo subconjunto não vazio de $\mathbb{K}$ que é limitado superiormente tem supremo em $\mathbb{K}$

1.15.6 Axioma fundamental da análise

Existe um corpo ordenado completo chamado de Corpo dos Números Reais.

2 CAPÍTULO 2: ESPAÇOS MÉTRICOS

INTRODUÇÃO:

Tanto no cálculo como na Geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudados de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de "distância entre dois pontos"ou conceitos derivados dessa noção, como o de vizinhança de um ponto, por exemplo. Citemos, entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância(ou da noção de vizinhança). Assim parece lógico, quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que independa das particularidades dos diversos tipos de "espaço"em que intervêm tal noção. Foi Cantor, por volta de 1870, quem deu os primeiros passos significativos nesse sentido. Estudando por essa época a representação de funções reais por meio de séries trigonométricas, Cantor procurou estender a unicidade da representação a funções dotadas de infinitos pontos singulares.

Pouco tempo depois, na década de 1880, alguns matemáticos italianos(Ascoli e Pincherle, por exemplo) fizeram uso das ideias de Cantor para o estudo de "espaços"não convencionais, espaços em que um ponto poderia ser uma curva ou uma função.

O passo seguinte, e decisivo, foi dado por Frechet em 1906 com sua tese de doutoramento. Neste trabalho, que marca o início do Cálculo Funcional, Frechet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando a economia de trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou várias maneiras de conseguir tal objeto, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Este assunto foi, posteriormente desenvolvido por Hausdorff em 1914 e ganhou sua contextura praticamente atual com Urysohn em 1924.

3 MÉTRICAS

3.1 DEFINIÇÃO DE ESPAÇO MÉTRICO E SUBESPAÇOS

Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d : M\ X\ M \to\ \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M\ X\ M$, através da função d. Dizemos que d é métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

(M_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

(M_2) $d(x, y) = d(y, x);$

(M_3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Nessas condições cada imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x a y e um par (M, d) onde d é uma métrica sobre M, é o que chamamos de Espaço Métrico. Em geral, ao nos referimos a um Espaço Métrico cujo conjunto é M, diremos apenas "Espaço Métrico M"o que pressupõe que a métrica correspondente esteja já subtendida.

Cada elemento de um Espaço Métrico será sempre referido como ponto desse espaço, seja ele um ponto mesmo, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor.

Definição 3.1.1. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Dado $S \subset M (M \neq \emptyset)$ se considerarmos a restrição $d_1 = d|S$, obviamente d_1 é uma métrica sobre S e assim obtemos, de maneira natural, o Espaço Métrico (S, d_1). Nessas condições dizemos que S é um* ***Subespaços*** *do Espaço Métrico M e que a métrica d_1 foi induzida por d sobre M. Em geral indica-se a métrica do subespaço do mesmo modo que a métrica M, isto é, faz-se $d_1 = d$.*

Proposição 3.1.1. *Se x,y e z são pontos genéricos de um Espaço Métrico (M, d), então $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$.*

Demonstração. De (M_3) decorre que

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y). \tag{1}$$

Por outro lado podemos expressar a mesma desigualdade (M_3) por

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

do que se conclui que

$$d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z). \tag{2}$$

De (1) e (2) obtém-se a tese:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

□

3.2 EXEMPLOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Exemplo 3.2.1. ***1. Métrica discreta ou Métrica zero-um.*** *É o mais simples exemplo de métrica que se pode considerar. Dado $M \neq \emptyset$ define-se $d : M\ X\ M \to \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:*

$$d(x, x) = 0\ (\forall\ x \in M)\ \ e\ \ d(x, y) = 1,$$

(sempre que $x \neq y$). é fácil provar que a função d, assim definida, é uma métrica. De fato, dados $x, y, z \in M$ temos que:

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) Se $x \neq y$ então $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ e se $x = y$ então $d(x, y) = 0 = d(y, x)$

iii) Um dos casos é aquele em que $x \neq y$ e $y = z$. Quando isto ocorre temos $d(x, y) = 1$, $d(x, z) = 1$ e $d(z, y) = 0$. Logo, neste caso, $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Assim temos que (M, d) é um Espaço Métrico.

Exemplo 3.2.2. ***2. A reta usual.*** *Considerando-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a função $d : \mathbb{R}\ X\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $d(x,y) = |x-y|$, é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.*

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y;$

ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x);$

iii) $d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$

Assim, d é uma métrica sobre M e, portanto, (M,d) é um Espaço Métrico.

Exemplo 3.2.3. ***3. Espaços vetoriais normados.*** *Um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto E sobre o qual estão definidas duas leis de composição, uma interna*

$$(u,v) \to u + v$$

chamada adição e uma externa, de $\mathbb{R}\ X\ E$ em E, $(\alpha, u) \to au$ chamada multiplicação por escalares para os quais se verificam as seguintes condições:

i) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall\ u, v, w \in E$*;*

ii) $u + v = v + u, \forall\ u, v \in E;$

iii) Existe $0 \in E$ *de modo que* $0 + u = u, \forall u \in E;$

iv) Para todo $u \in E$*, existe* $(-u) \in E$ *de maneira que* $u + (-u) = 0$

ou seja, E é um grupo abeliano em relação à adição e, ainda

v) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u),\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ e\ \forall\ u \in E;$

vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ e\ \forall u \in E;$

vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ e\ \forall\ u, v \in E;$

viii) $1u = u,\ \forall\ u \in E\ (*).$

Os elementos de um Espaço Vetorial são genericamente chamados de vetores. Se definirmos sobre $\mathbb{R}^n$ a adição e a multiplicação por escalares do seguinte modo:

Para quaisquer $x = (x_1, ..., x_n)\ e\ y = (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n),$$

obtemos o exemplo mais importante de Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$. Neste espaço, $0 = (0, 0, ..., 0)$ é o elemento neutro da adição e, dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, então $-x = (-x_1, ..., -x_n)$ é o simétrico de x.

Uma norma sobre um Espaço Vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $u \in E$ um número real não negativo, indicado por $||u||$, e chamado de norma de u, de maneira que:

(n$_1$) $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0;$

(n$_2$) $|| \alpha u|| = |\alpha| \ ||u||, \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \ e \ \forall \ u \in E;$

(n$_3$) ||u+v|| $\leq ||u|| + ||v||, \forall \ u, v \in E.$

Um Espaço Vetorial normado real é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$ dotado de uma norma. Se E é um Espaço Vetorial normado, então $d : E \ X \ E \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $d(u, v) = ||u - v||$ é uma métrica sobre E pois dados $u, v, w \in E$:

i) $d(u, v) = ||u - v|| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0 \Leftrightarrow u = v;$

ii) $d(u, v) = ||u - v|| = ||(-1)(v - u)|| = | - 1| \ ||v - u|| = ||v - u|| = d(v, u);$

iii) $d(u, v) = ||u - v|| = ||(u - w) + (w - v)|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u, w) + d(w, v).$

A métrica d assim obtida chama-se métrica induzida pela norma dada sobre E.

Um exemplo importante de Espaço Vetorial normado é o $\mathbb{R}^n$ juntamente com a norma dada por

$$x = (x_1, ..., x_n) \rightarrow ||x|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

3.3 ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS CONTÍNUAS DEFINIDAS NUM INTERVALO FECHADO.

Para um intervalo fechado $[a, b] \in \mathbb{R}$ indiquemos por $\delta[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$. Com relação à adição de funções e à multiplicação de uma função por um escalar(número real), $\delta[a, b]$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$. E a função

$$f \rightarrow ||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$$

é uma norma sobre esse espaço uma vez que $||f|| \in \mathbb{R}_+$, para qualquer $f \in \delta[a, b]$ e

i) $||f|| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall \ x \in [a, b]$ (pois $|f(x)|$ define uma função contínua) $\Leftrightarrow f(x) = 0, \forall \ x \in [a, b] \Leftrightarrow f = 0;$

ii) $||\alpha f|| = \int_a^b |(\alpha f)(x)|dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|dx = |\alpha| \ ||f||;$

iii) $||f+g|| = \int_a^b |(f+g)(x)|dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx = ||f|| + ||g||$.

Assim $\delta[a,b]$ é um Espaço Métrico sendo sua métrica definida da seguinte maneira:

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

para quaisquer $f, g \in \delta[a,b]$.

3.4 PRODUTOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Sejam $(M_1, d_1), ..., (M_n, d_n)$ espaços métricos arbitrários. Veremos agora que é possível tornar o conjunto $M = M_1 \ X \ ... \ X \ M_n$ em Espaço Métrico, através de métricas estreitamente ligadas às métricas $d_1, d_2, ..., d_n$.

Sendo $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ pontos genéricos de $M = M_1 \ X \ ... \ X \ M_n$ definamos as funções D, D_1 e $D_2 : M \to \mathbb{R}_+$ do seguinte modo:

$$D(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + ... + d_n(x_n,y_n)^2};$$

$$D_1(x,y) = d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n);$$

$$D_2(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), ..., d_n(x_n,y_n)\}.$$

As funções assim definidas são métricas sobre M. Demonstraremos que D_1 é uma métrica sobre M. De fato, dados $x, y, z \in M$ temos:

i) $D_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n) = 0 \Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0, ..., d_n(x_n,y_n) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1, ..., x_n = y_n \Leftrightarrow x = (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n) = y$.

ii) $D_1(x,y) = d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n) = d_1(y_1,x_1) + ... + d_n(y_n,x_n) = D_1(y,x)$

iii) Sabendo que cada $d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(y_i,z_i)$ pois cada d_i é métrica de M_i onde $1 \leq i \leq n$ então temos que:

$$D_1(x,y) = d_1(x_1,y_1) + ... + d_n(x_n,y_n) \leq$$

$$\leq d_1(x_1,z_1) + ... + d_n(x_n,z_n) + d_1(y_1,z_1) + ... + d_n(y_n,z_n) = D_1(x,z) + D_1(y,z)$$

3.5 DISTÂNCIA ENTRE PONTO E CONJUNTO - DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS - DIÂMETRO

Lembramos o seguinte fato tirado da geometria elementar: a distância de um ponto p a um plano α é a medida do segmento pq contido na perpendicular a α pelo ponto p.

Definição 3.5.1. *Seja* (M, d) *um Espaço Métrico. Dados* $p \in M$ *e* $A \subset M(A \neq \emptyset)$, *chama-se distância de p ao conjunto A, e indica-se por* $d(p, A)$*, o seguinte número real não negativo:*

$$d(p, A) = inf\left\{d(p, x)/\ x \in A\right\}.$$

Notemos que a existência de $d(p, A)$ está assegurada pelo fato de que o conjunto dos $d(p, x)$, com $x \in A$, é limitado inferiormente pelo zero.

Exemplo 3.5.1. *Consideremos sobre* $\mathbb{R}$ *a métrica usual. Se* $p = 0$ *e* $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$, *então* $d(p, A) = 0$*. De fato, na métrica usual temos que* $d(0, x) = |x|$ *com* $x \in A$*, daí neste caso o conjunto* $\{d(0, x)/\ x \in A\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} = A$ *e observe que* $d(0, A) = inf\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\} = 0$*.*

Proposição 3.5.1. *Seja* (M, d) *um Espaço Métrico. Se* $A \subset M$ *(*$A \neq \emptyset$*) e* $p, q \in M$, *então* $|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q)$.

Demonstração. Tomemos um ponto $x \in A$. Temos então: $d(p, A) \leq d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x)$. Daí $d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, x)$. Ora, como esta desigualdade vale para todo $x \in A$, então a constante $d(p, A) - d(p, q)$ é uma cota inferior do conjunto dos elementos do tipo $d(q, x)$ com $x \in A$. Donde

$$d(p, A) - d(p, q) \leq d(q, A).$$

Como esta desigualdade vale analogamente permutando-se p e q, então

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q).$$

□

Definição 3.5.2. *Seja* (M, d) *um Espaço Métrico. Dados dois subconjuntos A e B do conjunto M, ambos não vazios, chama-se distância de A a B, e indica-se por* $d(A, B)$, *o número real não negativo definido da seguinte maneira:*

$$d(A, B) = inf\left\{d(x, y)/x \in A\ e\ y \in B\right\}.$$

O fato de que o conjunto das distâncias $d(x, y)$, com $x \in A$ e $y \in B$ é limitado inferiormente pelo número 0 garante a existência de $d(A, B)$ para quaisquer subconjuntos não vazios $A, B \in M$.

Definição 3.5.3. *Seja* A *um subconjunto não vazio de um Espaço Métrico M. Suponhamos que exista* $k \in \mathbb{R}$ *de maneira que* $d(x, y) < k$, *para quaisquer* $x, y \in A$. *Nestas condições dizemos que A é um conjunto limitado e o supremo do conjunto* $\{d(x, y)/\ x, y \in A\}$ *chama-se diâmetro do conjunto A e é denotado por* $d(A)$*. Assim:*

$$d(A) = sup\left\{d(x, y)/\ x, y \in A\right\}.$$

Se o conjunto A não é limitado, por definição temos que $d(A) = \infty$.

3.6 BOLAS ABERTAS

3.6.1 Definição de Bola Aberta

O conceito de bola aberta a ser introduzido a seguir desempenha um papel fundamental na teoria dos espaços métricos. Apenas para uma tomada de posição inicial do leitor adiantamos que esse papel é o mesmo dos intervalos do tipo $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ no estudo de análise na reta. Em suma, elas têm uma atuação equivalente à dos $"\varepsilon"$ e dos $"\delta"$ do cálculo ou da análise real.

Definição 3.6.1. *Seja p um ponto de um Espaço Métrico (M, d). Sendo $\varepsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ε , que indicaremos por $B(p, \varepsilon)$, é o seguinte subconjunto de M:*

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M / \ d(x, p) < \varepsilon\}.$$

Exemplos:

1. Bolas num espaço cuja métrica é a "zero-um". Seja (M, d) um espaço discreto e consideremos $p \in M$. Há dois casos a considerar:

$(*)$ $0 < \varepsilon \leq 1$. Neste caso $B(p, \varepsilon) = \{x \in M / \ d(x, p) < \varepsilon\} = \{p\}$ porque o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio p.

$(**)$ $1 < \varepsilon$. Quando isto acontece, $B(p, \varepsilon) = \{x \in M / \ d(x, p) < \varepsilon\} = M$, porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um, e portanto, menor que ε.

2. Bolas na reta usual. Na reta real a bola de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio ε é o conjunto $B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} / \ |x - p| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} / \ p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\} =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$.

3. Bolas no espaço $\mathbb{R}^2$. Dadas três métricas de $\mathbb{R}^2$ para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$D(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}.$$

Sendo $p = (a, b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$, segundo a métrica D, é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / \ (X - a)^2 + (Y - b)^2 < \varepsilon^2\right\}$$

cujo gráfico é um disco aberto .

Quando a métrica for D_1, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B(p, \varepsilon) = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / \ |X - a| + |Y - b| < \varepsilon\right\}$$

cujo o gráfico é um quadrado aberto de diagonais paralelas aos eixos coordenados e de medida igual a 2ε, com centro em $p = (a, b)$.

Por último, quando se tratar da métrica D_2, temos

$$B(p, \varepsilon) = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / \ \max\{|X - a)|, |Y - b)|\} < \varepsilon\right\}$$

cujo o gráfico da relação

$$\max\{|X - a|, |Y - b|\} < \varepsilon$$

que representa no plano a bola $B(p, \varepsilon)$ é o interior de um quadrado de centro $p = (a, b)$, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e têm medida igual a 2ε ou seja, $B(p, \varepsilon) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ X \ ]b - \varepsilon, b + \varepsilon[= B(a, \varepsilon) \ X \ B(b, \varepsilon)$.

Isto quer dizer que a bola $B(p, \varepsilon)$ é o produto cartesiano das bolas de centro a e raio ε e de centro b e raio ε, ambas em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

Este resultado é bem mais geral, conforme mostraremos a seguir.

Proposição 3.6.1. *Sejam* $(M_1, d_1), ..., (M_n, d_n)$ *espaços métricos e consideremos sobre* $M = M_1 \ X \ ... \ X \ M_n$ *a métrica* D_2 *definida por:*

$$D_2(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), ..., d_n(x_n, y_n)\}$$

para quaisquer $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$ *de M. Nessas condições, vale então a seguinte igualdade, para todo* $a = (a_1, ..., a_n) \in M$*:*

$$B(a, \varepsilon) = B(a_1, \varepsilon) \ X \ ... \ X \ B(a_n, \varepsilon).$$

Demonstração. Seja $p = (p_1, ..., p_n)$ um ponto arbitrário de M. Então:

$p \in B(a, \varepsilon) \Leftrightarrow \max\{d_1(p_1, a_1), ..., d_n(p_n, a_n)\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow d_i(p_i, a_i) < \varepsilon \ (i = 1, 2, ..., n) \Leftrightarrow\Leftrightarrow p_i \in B(a_i, \varepsilon) \ (i = 1, 2, ..., n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p \in B(a_1, \varepsilon) \ X \ ... \ X \ B(a_n, \varepsilon).$ □

3.6.2 Propriedades básicas das Bolas Abertas

As propriedades a seguir referem-se a bolas genéricas $B(p,\varepsilon)$ de um Espaço Métrico arbitrário (M,d).

(P_1) Dados $B(p,\varepsilon)$ e $B(p,\delta)$, se $\varepsilon \leq \delta$, então $B(p,\varepsilon) \subset B(p,\delta)$.

Justificativa: Se $x \in B(p,\varepsilon)$, então $d(x,p) < \varepsilon$. Como $\varepsilon \leq \delta$, concluimos que $d(x,p) \leq \delta$ e portanto que $x \in B(p,\delta)$.

(P_2) Dado $q \in B(p,\varepsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que

$$B(q,\delta) \subset B(p,\varepsilon).$$

Justificativa: Tomemos $\delta = \varepsilon - d(p,q)$ e mostremos que efetivamente $B(q,\delta) \subset B(p,\varepsilon)$. Seja $x \in B(q,\delta)$. A desigualdade triangular nos garante que

$$d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p).$$

Como $d(x,q) < \delta = \varepsilon - d(p,q)$, então

$$d(x,p) < \varepsilon - d(p,q) + d(p,q) = \varepsilon$$

o que garante que $x \in B(p,\varepsilon)$.

(P_3) Sejam $B(p,\varepsilon)$ e $B(q,\delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta)$, então existe $\lambda > 0$ tal que

$$B(t,\lambda) \subset B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta).$$

Justificativa: Devido a (P_1) existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ de modo que

$$B(t,\lambda_1) \subset B(p,\varepsilon) \; e \; B(t,\lambda_2) \subset B(q,\delta)$$

Se $\lambda = min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, então $B(t,\lambda)$ está contida tanto em $B(t,\lambda_1)$ como em $B(t,\lambda_2)$ e portanto

$$B(t,\lambda) \subset B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta).$$

(P_4) Sejam p e q dois pontos, distintos entre si, de um espaço M. Se $d(p,q) = \varepsilon$, então

$$B(p,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset.$$

(P_5) Ddas as bolas $B(p,\varepsilon)$ e $B(q,\delta)$, se $\varepsilon + \delta \leq d(p,q)$, então

$$B(p,\varepsilon) \cap B(q,\delta) = \emptyset.$$

(P_6) O diâmetro de uma bola $B(p,\varepsilon)$ é menor que ou igual a 2ε, isto é, $d(B(p,\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

3.7 MÉTRICAS E NORMAS EQUIVALENTES

3.7.1 Métricas Equivalentes

Neste item consideraremos duas métricas d e d', não necessariamente iguais, sobre um mesmo conjunto M. Nessas condições, a fim de evitar confusões, indicaremos por $B_d(p,\varepsilon)$ uma bola de centro p e raio ε, segundo a métrica d e, obviamente por $B_{d'}(p,\varepsilon)$ a bola de centro p e raio ε quando se tratar da métrica d'.

Definição 3.7.1. *Sejam d e d' métricas sobre o mesmo conjunto M. Diz-se que d e d' são métricas equivalentes se, para cada $p \in M$, qualquer que seja a bola $B_d(p,\varepsilon)$, existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p,\lambda) \subset B_d(p,\varepsilon)$ e, vice-versa, dada uma bola qualquer $B_{d'}(p,\varepsilon)$ existe $\lambda > 0$ de forma que $B_d(p,\lambda) \subset B_{d'}(p,\varepsilon)$. Se d e d' são métricas equivalentes, indicaremos este fato por $d \sim d'$.*

Proposição 3.7.1. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Se existem números reais $r, s > 0$ tais que*

$$rd(x,y) \leq d'(x,y) \leq sd(x,y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então $d \sim d'$.

Demonstração. Seja p um ponto de M e consideremos a bola $B_d(p,\varepsilon)$. Mostremos que

$$B_{d'}(p, r\varepsilon) \subset B_d(p,\varepsilon).$$

De fato, dado $x \in B_{d'}(p, r\varepsilon)$, então $d'(x,p) < r\varepsilon$ e como $rd(x,p) \leq d'(x,p)$, obtemos que $rd(x,p) < r\varepsilon$. Donde $d(x,p) < \varepsilon$ e então $x \in B_d(p,\varepsilon)$.

Consideremos agora a bola $B_{d'}(p,\varepsilon)$ e provemos que $B_d(p, \frac{\varepsilon}{s}) \subset B_{d'}(p,\varepsilon)$.

Dado $x \in B_d(p, \frac{\varepsilon}{s})$, então $d(x,p) < \frac{\varepsilon}{s}$ e daí $sd(x,p) < \varepsilon$. Porém $d'(x,p) \leq sd(x,p)$ e portanto $d'(x,p) < \varepsilon$ o que garante que $x \in B_{d'}(p,\varepsilon)$. $\square$

3.7.2 Normas Equivalentes

Teremos ocasião agora de considerar duas normas, não necessariamente iguais, sobre um mesmo Espaço Vetorial E. Para deferenciá-las usaremos a notação $|| \ ||$ para uma delas e $|| \ ||'$ para a outra. As métricas induzidas sobre E por essas normas serão indicadas respectivamente por d e d'.

Definição 3.7.2. *Duas normas sobre um mesmo Espaço Vetorial E dizem-se equivalentes, se e somente se, as métricas induzidas por essas normas sobre E são equivalentes.*

Se $||\ \ ||$ e $||\ \ ||'$ são as normas consideradas e d e d' as métricas induzidas, respectivamente por essas normas, então a equivalência definida significa o seguinte: dada uma bola $B_d(p, \varepsilon)$, com $p \in E$, existe uma bola $B_{d'}(p, \lambda)$ de modo que

$$B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$$

e vice-versa.

Proposição 3.7.2. *Duas normas $||\ \ ||$ e $||\ \ ||'$ sobre um mesmo Espaço Vetorial E são equivalentes se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que*

$$r||u|| \leq ||u||' \leq s||u||$$

para qualquer $u \in E$.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Dados $u, v \in E$, por hipótese temos

$$r||u - v|| \leq ||u - v||' \leq s||u - v||$$

para quaisquer $u, v \in E$. A proposição 4 nos garante então que $d \sim d'$ o que, por sua vez significa que as normas dadas, por definição, são equivalentes.

($\Rightarrow$) Por hipótese as normas dadas são equivalentes. Logo, dada a bola $B_d(0, 1)$ existe uma bola $B_{d'}(0, \lambda)$ de modo que

$$B_{d'}(0, \lambda) \subset B_d(0, 1)$$

Tomando um número real r tal que $0 < r < \lambda$, o vetor $\frac{ru}{||u||'}$, para todo $u \in E, u \neq 0$, pertence à bola $B_{d'}(0, \lambda)$ visto que

$$\left\| \frac{ru}{||u||'} \right\|' = \frac{r||u||'}{||u||'} = r < \lambda$$

logo esse vetor também pertence à bola $B_d(0, 1)$ o que tem como consequência

$$\left\| \frac{ru}{||u||'} \right\| < 1$$

ou seja,

$$r||u|| < ||u||'$$

.

Por outro lado, dada a bola $B_{d'}(0, 1)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(0, \lambda) \subset B_{d'}(0, 1)$. Tomemos um número real s que verifique as desigualdades $0 < \frac{1}{s} < \lambda$. Então, para todo $u \in E$,$u \neq 0$, o vetor $\frac{u}{s||u||}$ pertence a $B_d(0, \lambda)$ visto que

$$\left\| \frac{u}{s||u||} \right\| = \frac{||u||}{s||u||} = \frac{1}{s} < \lambda$$

.

Logo também pertence a $B_{d'}(0,1)$, o que acarreta

$$\left\|\frac{u}{s||u||}\right\|' < 1,$$

ou seja,

$$||u||' < s||u||$$

.

Assim temos:

$$r||u|| < ||u||' < s||u||$$

para todo vetor $u \neq 0$. Se considerarmos também o vetor nulo de E teremos então exatamente a tese: existem $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ de maneira que

$$r||u|| < ||u||' < s||u||$$

para qualquer $u \in E.$ $\square$

3.8 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

3.8.1 Sequências - Limite de uma Sequência

Seja (M, d) um Espaço Métrico. Toda aplicação $n \to x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M, é chamada sequência de elementos de M e a notação para se indicar uma tal sequência é $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou, resumidamente, (x_n).

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência (x_n), cada imagem x_n é chamada termo da sequência. Assim o conjunto dos termos dessa sequência é $\{x_n/\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{x_1, x_2, ...\}$ e a conceituação aqui envolvida é bem diferente da de sequência. Por exemplo, $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, ...)$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ cujo conjunto dos termos é $\{1, 2\}$.

Dada uma sequência (x_r) em M, se $\{r_1, r_2, ...\} \subset \mathbb{N}^*$ e $r_1 < r_2 < ...$, então a aplicação dada por $r_j \to x_{r_j}$ é indicada por $(x_{r_1}, x_{r_2}, ...)$ e recebe o nome de subsequência de x_r. Por exemplo, considerando a sequência $(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$ de elementos em $\mathbb{R}$, então $(1, 1, 1, ...)$ é uma subsequência da sequência dada pois, temos

$$(1, 1, 1, ...) = (x_1, x_4, x_7, ...)$$

desde que faça,

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...) = (x_1, x_2, ...).$$

Definição 3.8.1. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Dizemos que um ponto $p \in M$ é limite de uma sequência (x_n) de pontos de M se, para toda bola $B(p, \varepsilon)$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, \varepsilon).$$

Para indicar que p é limite de sequência (x_n) usa-se a notação $\lim x_n = p$ ou, ainda, $x_n \to p$. Dizemos, para exprimir este fato, que (x_n) é uma sequência convergente ou que (x_n) converge para p.

Proposição 3.8.1. *Uma sequência (x_n) de elementos de M converge para $p \in M$, se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice r de maneira que*

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Demonstração. É evidente pois: $x_n \in B(p, \varepsilon) \Leftrightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$. □

Exemplos:

1. Seja num Espaço Métrico M uma sequência estacionária, isto é, uma sequência (x_n) de pontos de M tal que $x_n = p$, a partir de um certo índice. Assim: $(x_n) = (x_1, ..., x_r, p, p, ...)$. Tais sequências são convergentes para o termo que se repete, ou seja, $x_n \to p$, uma vez que $x_{r+1} = x_{r+2} = ... = p$, então, para todo $\varepsilon > 0$,

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \varepsilon.$$

Em particular as sequências constantes $(p, p, ...)$ convergem para essa constante p.

2. Consideremos $\mathbb{R}$ a métrica usual. A sequência $(x_1, x_2, ...)$, onde

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$

converge para o ponto 1. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $r \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\frac{1}{r+1} < \varepsilon$. Então para todo $n \geq r$, temos:

$$d(x_n, 1) = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{r+1} < \varepsilon$$

o que vem garantir nossa afirmação.

Proposição 3.8.2. *Seja (x_n) uma sequência convergente de um Espaço Métrico M. Então é ínico o limite dessa sequência.*

Demonstração. Suponhamos $\lim x_n = p$ e $\lim x_n = q$. Se $p \neq q$, então $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$ é maior que zero e portanto existem índices r,s de maneira que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

$$n \geq s \Rightarrow d(x_n, q) < \varepsilon$$

.

Tomando $t = \max\{r, s\}$, então

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon \;\; e \;\; d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Daí então, para todo $n \geq t$:

$$d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é um absurdo. □

Proposição 3.8.3. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre um conjunto M. Então uma sequência (x_n) de pontos de M converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$ se, e somente se, essa sequência converge em (M, d') para o mesmo ponto p.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Por hipótese $x_n \to p$ no espaço (M,d). Dado uma bola $B_{d'}(p, \varepsilon)$, como d til d', existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \varepsilon)$$

A hipótese assinalada no início da demonstração garante então que existe $r > 0$ tal que

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B_d(p, \lambda)$$

e portanto

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B_{d'}(p, \varepsilon)$$

o que prova que $x_n \to p$ em (M, d').

$(\Leftarrow)$ A demonstração desta recíproca obviamente é análoga à que acabamos de fazer. □

Proposição 3.8.4. *Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Demonstração. Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, ...)$ uma subsequência da sequência dada e consideremos $\varepsilon > 0$. Da hipótese de que $\lim x_n = p$ decorre que existe k tal que

$$n \geq k \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon.$$

Ora, como cada $r_j \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r_2 < ...$, então existe $r_t > k$ e portanto para todo $r_j \geq r_t$, vale a relação

$$d(x_{r_j}, p) < \varepsilon$$

com o que fica provado que $\lim x_{r_j} = p$. □

Nota: A recíproca da proposição acima obviamente não é válida. Em $\mathbb{R}$, por exemplo, a sequência $(1, 2, 1, 2, ...)$ não é convergente enquanto que suas subsequências $(1, 1, 1, ...)$ e $(2, 2, 2, ...)$ são convergentes.

Definição 3.8.2. *Uma sequência (x_n) de pontos de um Espaço Métrico M se diz limitada se o conjunto $\{x_n/n = 1, 2, ...\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_s) < k$, para quaisquer termos x_r e x_s da sequência dada.*

Proposição 3.8.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de um espaço M, convergente para $p \in M$. Dada a bola $B(p, 1)$, existe então um índice r tal que

$$n \geq r \Rightarrow x_n \in B(p, 1).$$

Seja $k > \max\{d(x_i, p)/i = 1, ..., r - 1\}$ e consideremos a bola $B(p, \varepsilon)$, onde $\varepsilon = \max\{1, k\}$. Então todos os pontos do conjunto $\{x_n/n = 1, 2, ...\}$ pertencem a essa bola e portanto, para quaisquer termos x_i e x_j da sequência:

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_j, p) + d(p, x_j) < 2\varepsilon$$

o que prova ser a sequência (x_n) limitada. □

Nota: Nem toda sequência limitada é convergente. De fato, em $\mathbb{R}$ a sequência $(1, 2, 1, 2, ...)$ é obviamente limitada mas não é convergente.

4 SEQUÊNCIA NUM ESPAÇO PRODUTO

Sejam M e N espaços métricos arbitrários. No que veremos neste parágrafo, ou nas implicações posteriores, dele, estaremos considerando sobre $M \times N$ uma qualquer das métricas habituais num produto cartesiano.

Uma sequência de pontos de $M \times N$, sendo definida por

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), ...)$$

onde cada $x_i \in M$ e cada $y_i \in N$, determinada a sequência (x_n) de pontos de M, e a sequência (y_n) de pontos de N. Estabeleceremos, a seguir, condição que dá a convergencia de $((x_n, y_n))$ em termos da convergência das sequências (x_n) e (y_n).

Proposição 4.0.1. *Uma sequência $((x_n, y_n))$ de pontos do produto $M \times N$ de dois espaços métricos M e N converge para $(p, q) \in M \times N$ se, e somente se, $x_n \to p$ em M e $y_n \to q$ em N.*

Demonstração. Faremos a demonstração usando a métrica D_1(da soma) e, para tanto, indicaremos por d tanto a métrica de M como a de N.

$(\Rightarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$. Então existe um índice r tal que

$$n \geq r \Rightarrow D_1((x_n, y_n), (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \varepsilon$$

Consequentemente, para todo $n \geq r$, temos

$$d(x_n, p) < \varepsilon \;\; e \;\; d(y_n, q) < \varepsilon$$

o que nos garante que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$.

$(\Leftarrow)$ Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese existem índices r e s tais que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \;\; e \;\; n \geq s \Rightarrow d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerar $t = max\,\{r, s\}$, então

$$n \geq t \Rightarrow D_1((x_n, y_n), (p, q)) = d(x_n, p) + d(y_n, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donde $((x_n, x_n)) \to (p, q)$. $\square$

Nota: A generalização do que acabamos de ver, para n espaços métricos $(n \geq 2)$, é imediata: dados os espaços métricos $M_1, M_2, ..., M_n$, uma sequência

$$((x_{11}, x_{22}, ..., x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}), ...)$$

de pontos de $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, e se prova, de maneira análoga, que a sequência dada em $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ converge para o ponto $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ desse espaço se, e somente se,

$$(x_{1i}, x_{2i}, ...) \to p_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

5 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

5.1 SEQUÊNCIAS EM $\mathbb{R}$

No espaço $\mathbb{R}$ têm muito interesse as chamadas sequências monótonas que compreendem os seguintes tipos:

Crescentes são as sequências (x_n) tais que $x_r \leq x_{r+1}$, para qualquer índice r. Se $x_r < x_{r+1}$ para todo $r \geq 1$, então (x_n) se diz estritamente crescente.

Decrescentes são as sequências (x_n) para as quais se tem $x_{r+1} \leq x_r$, para todo índice r. Quando $x_{r+1} < x_r$, para qualquer $r \geq 1$, então a sequência se diz estritamente decrescente.

Proposição 5.1.1. *Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo desse conjunto.*

Demonstração. Suponhamos (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_1 < x_2 < ... < k$ e seja $p = sup\{x_n/\ n = 1, 2, ...\}$. Provaremos que $\lim x_n = p$.

Dado $\varepsilon > 0$, não se pode ter $x_n < p - \varepsilon$ para todo índice n pois isto significaria a existência de uma cota superior do conjunto $\{x_n\}$ menor do que p. Donde, para um certo índice r tem-se $p - \varepsilon < x_r \leq p$ e daí:

$$p - \varepsilon < x_n < p + \varepsilon$$

para todo $n \geq r$, ou seja:

$$n \geq r \Rightarrow |x_n - p| < \varepsilon.$$

Isto vem garantir nossa afirmação de que $\lim x_n = p$. $\square$

Nota: Do mesmo modo se prova que "Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo desse conjunto".

Proposição 5.1.2 (Conservação do sinal)**.** *(a) Se (x_n) é uma sequência em $\mathbb{R}$ e se $\lim x_n = p > 0,$ então existem índice r e uma constante $c > 0$ de maneira que $x_n > c,$ para todo $n \geq r.$*

(b) Se $\lim x_n = p < 0,$ então existe uma constante $c < 0$ e existe um índice r tal que $x_n < c$ para qualquer $n \geq r.$

Demonstração. (a) Tomemos $\varepsilon = \dfrac{p}{2}$. Então existe um índice r tal que $n \geq r$ se tem $|x_n - p| < \dfrac{p}{2}$, ou seja, $-\dfrac{p}{2} < x_n - p < \dfrac{p}{2}$. Donde (somando p), $\dfrac{p}{2} < x_n,$ para qualquer $n \geq r$. Então basta tomar $c = \dfrac{p}{2}$.

(b) Neste caso a demonstração é semelhante: é só tomar $\varepsilon = \dfrac{|p|}{2}$ e veremos que $c = \dfrac{p}{2}$ verificará a condição proposta, a partir de um certo termo.

$\square$

Nota: A proposição acima significa, em particular, que $x_n > 0$ para todo $n \geq r$(no primeiro caso) e que $x_n < 0$, de um determinado termo em diante (no segundo caso).

5.2 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS NORMADOS QUALQUER

Dado um Espaço Vetorial normado E chamaremos de origem de E o ponto 0 do espaço, ou seja, o elemento neutro da adição de E (vetor nulo).

Proposição 5.2.1. *Seja (x_n) uma sequência de pontos de um Espaço Vetorial normado E que converge para $p \in E$. Então existe uma bola de centro na origem que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice r tal que

$$n \geq r \Rightarrow d(x_n, p) = ||x_n - p|| < 1$$

.

Como porém

$$||x_n|| = ||x_n - p + p|| \leq ||x_n - p|| + ||p||,$$

então para todo $n \geq r$ tem-se

$$||x_n|| < 1 + ||p||.$$

Seja $\lambda > max\,\{||x_1||, ..., ||x_{r-1}, 1 + ||p||\}$. Então, para todo índice n:

$$d(x_n, 0) = ||x_n|| < \lambda,$$

o que prova a proposição. □

Definição 5.2.1. *Seja $f = (x_n)$ e $g = (y_n)$ sequências de um Espaço Vetorial Normado E. Chama-se soma de f com g a sequência $f + g = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$. Se $k = (\alpha_n)$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$, então o produto kf é definido naturalmente do seguinte modo: $kf = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$.*

Proposição 5.2.2. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de um Espaço Vetorial Normado E. Se $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$, então $\lim(x_n + y_n) = p + q$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Então, por hipótese, existem índices r e s tais que

$$n \geq r \Rightarrow ||x_n - p|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$n \geq s \Rightarrow ||y_n - q|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando $t = max\,\{r, s\}$ temos então:

$$n \geq t \Rightarrow \|(x_n + y_n) - (p + q)\| \leq ||x_n - p|| + ||y_n - q|| < \varepsilon$$

e, portanto, $(x_n + y_n) \to p + q$. □

Corolário: Se (x_n) e (y_n) são sequências em $\mathbb{R}$ tais que $x_n \leq y_n$, a partir de um determinado índice r, e se (x_n) e (y_n) são convergentes, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

De fato, suponhamos que $\lim x_n > \lim y_n$ e consideremos a sequência $(x_n - y_n)$. É fácil mostrar que $\lim(-y_n) = -\lim y_n$. Daí então $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n > 0$. Donde vamos ter que $x_n - y_n > 0$ para todo índice n maior que um determinado índice s(prop. 13). Ora, se tomarmos $n > \max\{r, s\}$ teremos então a seguinte contradição: $x_n > y_n$ e $x_n \leq y_n$. Com isto fica provada a proposição.

Lema: Seja (x_n) uma sequência de pontos de um Espaço Vetorial Normado E. Se (x_n) converge para p, então a sequência $(\|x_n\|)$ converge para $\|p\|$.

Demonstração. Notemos inicialmente que, para todo índice n,

$$||x_n|| = ||x_n - p + p|| \leq ||x_n - p|| + ||p||$$

e, portanto

$$||x_n|| - ||p|| \leq ||x_n - p||.$$

Analogamente se obtém que

$$||p|| - ||x_n|| \leq ||x_n - p||.$$

Donde, então

$$|\ ||x_n|| - ||p||\ | \leq ||x_n - p||.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, por hipótese existe $r > 0$ tal que $||x_n - p|| < \varepsilon$, para todo $n \geq r$. Logo vamos ter também

$$|\ ||x_n|| - ||p||\ | < \varepsilon,$$

para qualquer índice maior que o mesmo r. □

6 A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

O presente capítulo objetiva, entre outras coisas, por em relêvo uma importante estrutura matemática subjacente aos espaços métricos, estrutura essa que repousa nas propriedades básicas dos chamados“conjuntos abertos” do espaço, cuja definição daremos logo a seguir. A proposição 1 deste capítulo coloca em destaque essas propriedades básicas. De um modo geral uma coleção Δ de subconjuntos de um conjunto $E \neq \emptyset$ é uma topologia sobre E se:

(i) $\emptyset, E \in \Delta$;

(ii) $X, Y \in \Delta \Rightarrow X \cap Y \in \Delta$;

(iii) Se (X_i) é uma família de membros de Δ, então $\cup X_i \in \Delta$.

O par (E, Δ) é chamado de espaço topológico.

Definição 6.0.1. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.*

Nota: É imediato, a partir da definição, que se $A \neq \emptyset$ é um conjunto aberto, então A é uma união de bolas abertas. E, ademais, se A é uma união de bolas abertas, A é um conjunto aberto. De fato, suponhamos $A = \cup B_i$, onde cada B_i é uma bola aberta. Dado então $p \in A$, existe um índice s tal que $p \in B_s$. Ora, de acordo com a propriedades (P_2) das bolas abertas existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset B_s$. Daí $B(p, \delta) \subset A$ e isto prova nossa afirmação.

Exemplos:

1. Consideremos sobre $\mathbb{R}$ a métrica usual. Então $A =]a, +\infty[$ é aberto, para todo $a \in \mathbb{R}$, uma vez que dado $p \in A$, tomando $\varepsilon = \frac{p-a}{2}$, então $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset A$. De maneira análoga se prova que são abertos neste espaço todos os intervalos do tipo $]a, b[$ tomando $\varepsilon < \min\{p - a, b - p\}$ $(\varepsilon > 0)$, então:

$$]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subset]a, b[.$$

2. Toda bola aberta $B(p, \varepsilon)$ num espaço M é um conjunto aberto. Isto é garantido pela propriedade (P_2) das bolas abertas a qual nos diz que, para todo $q \in B(p, \varepsilon)$, existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \varepsilon)$.

3. Se d é a métrica "zero-um" sobre um conjunto M, então todo $A \subset M$ é aberto. De fato, se $A = \emptyset$ é imediato. Se $A \neq \emptyset$, então $A = \cup_{p \in A} \{p\}$ e como cada $\{p\}$ é uma bola aberta (centro p e raio $\varepsilon \leq 1$), então A é aberto.

Proposição 6.0.1. *Seja Δ a coleção de abertos de um Espaço Métrico (M, d). Então:*

(i) $\emptyset, M \in \Delta$;

(ii) $A, B \in \Delta \Rightarrow A \cap B \in \Delta$;

(iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de Δ, ou seja, se cada $A_i \in \Delta$, então $\cup A_i \in \Delta$.

Demonstração. (i) É claro que $\emptyset$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e, portanto, de não poder contrariar a definição dada. Quanto a M, toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M, por definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p, \varepsilon) \subset A$ e $B(p, \lambda) \subset B$. Supondo que $\varepsilon \leq \lambda$ a propriedade (P_1) das bolas abertas nos garante que

$$B(p, \varepsilon) \subset B(p, \lambda).$$

Donde $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um certo $\varepsilon > 0$ vale a relação $B(p, \varepsilon) \subset A_t$. Então $B(p, \varepsilon) \subset \cup A_i$.

□

Notas:

1. Levando em conta a introdução deste capítulo podemos dizer que Δ é uma topologia sobre M e que (M, Δ) é um espaço topológico.

2. É claro que, por indução, pode-se provar que dados $A_1, ..., A_n \in \Delta (n \geq 1)$, então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \Delta$.

3. A interseção de uma família infinita de conjuntos abertos pode, porém, não ser um conjunto aberto. De fato, na família (A_i), onde $A_i =]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}[$, com $i = 1, 2, ...$, cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$(métrica usual), no entanto

$$\cap A_i = \{0\}$$

não é aberto porque, obviamente, não existe nenhum intervalo em $\mathbb{R}$ formado apenas pelo ponto 0.

Proposição 6.0.2. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M. Se Δ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d) e Δ' é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d'), então $\Delta = \Delta'$.*

Demonstração. Seja $A \in \Delta$ e tomemos $p \in A$. Como $A \in \Delta$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(p, \varepsilon) \subset A$. Da equivalência $d \sim d'$ decorre que existe $\lambda > 0$ de maneira que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \varepsilon)$. Daí $B_{d'}(p, \lambda) \subset A$ o que mostra que $A \in \Delta'$. Assim provamos $\Delta \subset \Delta'$. Como obviamente, de maneira análoga se mostra que $\Delta' \subset \Delta$, então a demonstração está concluída. □

Nota: A proposição acima significa que métricas equivalentes determinam a mesma estrutura topológica.

Definição 6.0.2. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Se $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado interior de A e é indicado por $\dot{A}$. É claro que $\dot{A} \subset A$.*

Nota: Observemos que, se todos os pontos de A são interiores, isto é, se $A = \dot{A}$ então por definição A é aberto.

Exemplo 6.0.1. *Na reta real consideremos $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Em ambos os casos só o ponto a não é interior: um intervalo $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= B(a, \varepsilon)$ certamente não está contido nem em A e nem em B. Daí $\dot{A} =]a, b[$ e $\dot{B} =]a, +\infty[$. Ainda em $\mathbb{R}$ temos que $\dot{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e também $\dot{\mathbb{Z}} = \emptyset$. De fato, um intervalo $I =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ sempre contém números irracionais e portanto $I \nsubseteq \mathbb{Q}$ e $I \nsubseteq \mathbb{Z}$.*

Definição 6.0.3. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, F^c é aberto.*

Nota: Devemos observar inicialmente que fechado não significa ser aberto. Assim, dependendo do espaço M, podemos ter subconjuntos que não são nem abertos e nem fechados, como podemos ter subconjuntos que são ambas as coisas. Por exemplo, na reta usual o conjunto $\mathbb{Q}$ não é aberto, como já vimos, e também não é fechado: de fato, como existem números racionais em qualquer intervalo $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$, então, tomando $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\nsubseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o que mostra que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é aberto e que, portanto, $\mathbb{Q}$ não é fechado.

Exemplo 6.0.2. *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a, b], [a, +\infty[$ ou $] - \infty, a]$.*

De fato: $[a, b]^c =] - \infty, a[\ \cup \ ]b, +\infty[$ e cada um destes intervalos é aberto

$$[a, +\infty[^c =] - \infty, a[\ \ aberto,$$

$$] - \infty, a]^c =]a, +\infty[\ \ aberto.$$

Proposição 6.0.3. *Seja Θ a coleção dos conjuntos fechados de um Espaço Métrico M. Então:*

(i) $\emptyset, M \in \Theta$

(ii) $H, F \in \Theta \Rightarrow H \cup F \in \Theta$

(iii) Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de Θ, então $\cap F_i \in \Theta$.

Demonstração. (i) $\emptyset$ e M pertencem a Θ porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ pertencem a Δ(coleção dos abertos de M).

(ii) Como $H, F \in \Theta$, então temos que H^c e F^c são conjuntos abertos, daí $(H \cup F)^c = H^c \cap F^c$ é aberto como vimos anteriormente. Portanto, temos que $H \cup F$ é fechado, isto é, $H \cup F \in \Theta$.

(iii) Como cada F_i é fechado, então cada F_i^c é aberto e, portanto, $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto. Consequentemente $\cap F_i$ é fechado.

□

Nota: Se $F_1, F_2, ..., F_n (n \geq 1)$ são conjuntos fechados do espaço M, então $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ também é fechado em M. Mas uma união infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. De fato, em $\mathbb{R}$ cada subconjunto unitário é fechado, mas $I =]a, b[= \cup \{p\}$ com $p \in I$ não é fechado.

Definição 6.0.4. *Seja A um subconjunto de um Espaço Métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz ponto aderente ao conjunto A se, para todo $\varepsilon > 0$, vale a relação*

$$B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

O conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A chama-se fecho de A e A e é indicado por $\overline{A}$. É imediato que $A \subset \overline{A}$ pois dado $p \in A$ temos que $p \in B(p, \varepsilon)$.

Exemplo 6.0.3. *Na reta real, se $A =]a, b]$ ou $A = [a, b[$ ou $A =]a, b[$, então $\overline{A} = [a, b]$. De fato, os pontos a e b são aderentes a esses intervalos porque qualquer bola(ou seja, intervalo aberto) de centro num deles, certamente intercepta o conjunto A. Por outro lado, se $p < a$ ou $p > b$, então $p \notin \overline{A}$ porque, no primeiro caso, por exemplo, tomando $\varepsilon = \dfrac{a-p}{2}$, a bola $B(p, \varepsilon) =]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ não intercepta A.*

Proposição 6.0.4. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Então, para todo $A \subset M$, vale a relação $(\overline{A})^c = \dot{A}^c$. (isto é, o complementar do fecho de A é igual ao interior do complementar de A).*

Demonstração.

$$p \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow p \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon, \varepsilon > 0; B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(p, \varepsilon) \subset A^c \Leftrightarrow p \in \dot{A}^c.$$

□

Corolário: $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.

Demonstração. Lembremos que $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $\dot{A} = A$. Assim:

F é fechado $\Leftrightarrow F^c$ é aberto $\Leftrightarrow \dot{F^c} = F^c \Leftrightarrow (\overline{F})^c = F^c \Leftrightarrow \overline{F} = F.$ □

Proposição 6.0.5. *Seja (M, d) um Espaço Métrico. Se $p \in M$ e $A \subset M$, então $d(p, A) = 0$ se, e somente se, $p \in \overline{A}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Dado $\varepsilon > 0$, como

$$d(p, A) = inf\, \{d(p, x)/x \in A\} = 0$$

existe então $a \in A$ de maneira que $0 \leq d(p, a) < \varepsilon$(caso contrário teríamos $0 < \varepsilon \leq d(p, x), \forall x \in A)$. Daí $a \in B(p, \varepsilon)$, e portanto $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, o que significa que $p \in \overline{A}$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos $d(p, A) = \varepsilon > 0$. Como por hipótese $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, então existe $a \in A$ tal que

$$d(a, p) < \varepsilon.$$

Como porém

$$\varepsilon = d(p, A) \leq d(p, a) < \varepsilon.$$

temos aí o absurdo que encerra a demonstração. □

Proposição 6.0.6. *Para todo subconjunto não vazio A de um Espaço Métrico M vale a igualdade $d(A) = d(\overline{A})$.*

Demonstração. Como $A \subset \overline{A}$, então $d(A) \leq d(\overline{A})$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer $x, y \in \overline{A}$, existem $a, b \in A$ de modo que $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí:

$$d(x, y) \leq d(\overline{A}) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) < \varepsilon + d(A)$$

e, portanto,

$$d(\overline{A}) \leq \varepsilon + d(A),$$

ou seja,

$$0 \leq d(\overline{A}) - d(A) \leq \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ dado a priori. Donde $d(\overline{A}) - d(A) = 0$ ou $d(A) = d(\overline{A})$ como queríamos provar. □

Proposição 6.0.7. *Se A é um subconjunto de um Espaço Métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, ...)$ de pontos de A tal que $\lim x_n = p$.*

Demonstração. Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B(p, \frac{1}{n})(n = 1, 2, ...)$, contém pontos de A. A sequência $(x_1,\ x_2, ...)$, onde $x_n \in A \cap B(p, \frac{1}{n})$, para todo $n \geq 1$, converge para p. De fato, toda bola $B(p, \varepsilon)$ contém $B(p, \frac{1}{r})$ desde que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto, nestas condições, contém $x_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2}, ...$ Como (x_n) é uma sequência de pontos de A, então a proposição está provada. □

Definição 6.0.5. *Dado um Espaço Métrico (M, d), um subconjunto $A \subset M$ se diz denso em M se $\overline{A} = M$.*

A definição acima significa, em outros termos, que, para todo $p \in M$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ de maneira que $d(a, p) < \varepsilon$. Intuitivamente, para cada ponto $p \in M$ existe, arbitrariamente "próximo"de p, um ponto $a \in A$.

Proposição 6.0.8. *Seja M um Espaço Métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$, para todo aberto $G \neq \emptyset$ desse espaço.*

Demonstração. Dado $p \in G$, então $\varepsilon > 0$ de maneira que $B(p, \varepsilon) \subset G$. Como $\overline{A} = M$, então existe $a \in A$ tal que $d(p, a) < \varepsilon$, ou seja, vale a relação $a \in B(p, \varepsilon)$. Daí $a \in G$ e portanto $G \cap A \neq \emptyset$. □

Definição 6.0.6. *Sejam (M, d) um Espaço Métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é um ponto de acumulação de A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, a interseção*

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A$$

é um conjunto infinito. Quer dizer, toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A, distintos do ponto p.

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado conjunto derivado de A e se indica por A'. é imediata a verificação de que: $A \subset B \subset M \Rightarrow A' \subset B'$.

Exemplo 6.0.4.
1. *No espaço $\mathbb{R}$ usual o único ponto de acumulação de $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ é o ponto 0. De fato, uma bola $B(0, \varepsilon) =]-\varepsilon, \varepsilon[$ contém todos os elementos $\frac{1}{r} \in A$ tais que $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Por outro lado, é óbvio que, para qualquer outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[$ cuja interseção com A não é infinita(mais precisamente: vazia). Assim $A' = \{0\}$.*

2. *Se d é a métrica “zero-um” sobre M, então, para todo $A \subset M$, vale a igualdade $A' = \emptyset$. De fato, para qualquer $p \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) = \{p\}$ (é só tomar $0 < \varepsilon \leq 1$). Daí $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$ e $p \notin A'$. Portanto, $A' = \emptyset$.*

Notas:

1. Para todo espaço M, se $A \subset M$ e $p \notin A'(p \in M)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset$.

De fato, como $p \notin A'$, existe $\lambda > 0$ tal que, digamos $(B(p, \lambda) - \{p\}) \cap A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$(finito). Tomando

$$\varepsilon < \lambda, d(p, x_1), ..., d(p, x_n)$$

vamos ter então

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset.$$

2. Seja (x_n) uma sequência tal que $A = \{x_1, x_2, ...\}$ é infinito e possui um ponto de acumulação em A. Então existe uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) que converge para este ponto.

De fato, se $p \in A'$, então cada interseção

$$C_n = \left(B(p, \frac{1}{n}) - \{p\}\right) \cap A \neq \emptyset (n = 1, 2, ...)$$

é infinita. Assim tomemos um, e um só, elemento

$$x_{n_j} \in C_i$$

de maneira que $n_j > n_i$ sempre que $i < j$. Mostremos que a subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$ assim construída converge para p. Dado $\varepsilon > 0$ existe um número $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$ e portanto

$$B(p, \varepsilon) \supset B\left(p, \frac{1}{r}\right) \supset B\left(p, \frac{1}{r+1}\right) \supset ...$$

Como por construção $x_{n_j} \in B(p, \frac{1}{i})(i = 1, 2, ...)$, então

$$x_{n_j} \in B(p, \varepsilon), \forall i \geq r$$

e, portanto, $\lim x_{n_j} = p$.

Proposição 6.0.9. *Seja M um Espaço Métrico. Então $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que exista $p \in F'$ tal que $p \notin F$. Então $p \in F^c$, que é aberto, e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$. Mas como $p \in F'$ então $(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito do que decorre que $B(p, \varepsilon) \cap F$ também é infinito e portanto não vazio. Este absurdo vem garantir a validade desta implicação, ou seja, $F' \subset F$.

$(\Leftarrow)$ Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, então $F^c \subset (F')^c$ e daí $p \in (F')^c$. Donde existe $\varepsilon > 0$ de maneira que

$$(B(p, \varepsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset$$

conforme a nota anterior. Mas $p \notin F$ e daí vamos ter também a igualdade $B(p, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ que equivale a $B(p, \varepsilon) \subset F^c$ o que nos garante que todos os pontos de F^c são interiores, ou seja, que F^c é aberto. Donde F é fechado. □

7 TOPOLOGIA E O ENSINO.

INTRODUÇÃO:

Neste capítulo abordaremos o conteúdo da topologia mas sem o rigor matemático utilizado nos cursos de graduação, a partir deste capítulo vamos estudar a topologia de forma intuitiva, como uma geometria não-euclidiana e qualitativa. Aqui vamos estudar três artigos de topologia aplicada ao ensino, de forma que irá proporcionar ao leitor uma outra forma de enxergar a topologia, visão esta que não é ensinada nos cursos superiores de matemática. Veremos a topologia de tal forma que percebe-se que até mesmo alunos de ensino fundamental poderão aprender tal conteúdo sem grandes dificuldades.

7.1 ARTIGO 1: TÓPICOS EM TOPOLOGIA INTUITIVA

Resumo:

O texto apresenta um estudo inicial sobre Topologia, feito sob um ponto de vista intuitivo e transdisciplinar, mostrando que vários conceitos topológicos fazem parte do cotidiano popular. Alguns problemas clássicos e um pouco da historia da Topologia são apresentados, assim como sua ligação com outras áreas do conhecimento.

7.1.1 Introdução

Do grego topos - forma e logos - estudo, Topologia significa "estudo das formas". Segundo Courant e Robbins(2000) a Topologia tem como objeto o estudo das propriedades das Figuras geométricas que persistem mesmo quando as Figuras são submetidas a deformações tão drásticas que todas as suas propriedades métricas e projetivas são perdidas. Em outras palavras, pode-se dizer que a Topologia é o ramo da Matemática que se dedica ao estudo das influências mais profundas da noção de continuidade, noção esta que aparece com grande frequência em diversas outras áreas da Matemática, levando a Topologia a ser considerada como um de seus pilares. A Topologia tem suas raízes em aplicações nas mais diversas áreas, com muitos de seus resultados descobertos por meio de procedimentos intuitivos, que mais tarde formalizados pelo rigor matemático.

7.1.2 Histórico e alguns conceitos elementares em Topologia

O célebre problema das sete pontes de Konigsberg, cidade da antiga Prússia, hoje Kaliningrado e Rússia, respectivamente, é considerado como o problema que fomentou o surgimento da Topologia.

Na parte central de Koningsberg, o rio Pregel se divide em dois, chamados de rio Pregel Velho, ao norte, e rio Pregel Novo, ao sul, dividindo a cidade em quatro porções de terra. para ligar essas porções de terra, foram instaladas sete pontes, como pode ser visto na Figura abaixo.

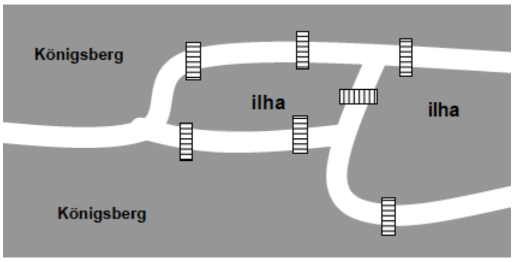


Figura 0

Os habitantes do local lançaram o desafio de se fazer um passeio pela cidade atravessando as sete pontes, cada uma, uma única vez. Este problema já havia se tornado célebre popularmente quando o matemático suíço Leonhard Euler, em 1736, percebeu que o problema não era de Geometria, como se pensava, uma vez que as distâncias envolvidas eram irrelevantes, mas importava a maneira como as porções de terra estavam interligadas entre si. Assim, nasceram a Topologia e a Teoria dos Grafos - Euler estabeleceu um grafo, possivelmente o primeiro da historia, representando as porções de terra e as pontes como vértices e arestas, respectivamente, preocupando-se com a forma com que os vértices eram ligados, como foi dito. A partir do grafo, Euler percebeu que a única maneira de se atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte(aresta) seria se houvesse no máximo dois vértices de onde saia um número ímpar de caminhos. De fato, para cada vértice deve haver um número par de caminhos, pois é necessário um caminho pra entrar e outro pra sair. Os dois vértices com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Assim, Euler chegou a conclusão de que, como foi configurado o problema das sete pontes de Konigsberg não tinha solução, uma vez que todos os vértices estão associados a um número ímpar de caminhos, o que pode ser verificado na Figura abaixo, onde as porções de terra são representadas por letras maiúsculas e as pontes por letras minísculas.

Apesar do surgimento das idéias em Topologia ser atribuído a Euler e ao problema das Pontes de Konigsberg, quase um século antes o matemático francês René Descartes, por volta de 1639, já sabia que se um poliedro tem V vértices, F faces e A arestas, vale a equação $V - A + F = 2,$, relação mais tarde conhecida como Característica de Euler. Ainda no século XVIII outras contribuições à Topologia foram feitas pelo francês Augustin Louis Cauchy e pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss, que também perceberam propriedades de forma mais abstratas do que as descritas pela Geometria.

Na historia da Topologia, dois alunos de Gauss têm extrema importância, são eles Johan Listing e August Mobius. Listing foi o responsável pela primeira aparição da palavra Topologia numa publicação científica, num artigo denominado Vorstudien zur Topologie, que tratava sobre o estudo dos nós. Já Mobius foi o responsável pela definição precisa do conceito de transformação topológica, que deu identidade a Topologia como sendo o ramo da Matemática que estuda as propriedades das Figuras que permanecem invariantes face a tais transformações.

Segundo Devlin (2004) uma transformação topológica é uma transformação de uma Figura numa outra de tal maneira que dois quaisquer pontos que se encontram juntos na Figura original permanecem juntos na Figura transformada.

Devlin(2004), sobre o surgimento da Topologia, afirma que a idéia era desenvolver uma Geometria que estudasse as propriedades das Figuras que não são destruídas por deformações contínuas e, portanto, não dependem de noções como linhas retas, círculos, cubos e assim por diante, ou de medidas de comprimento, área, volume ou ângulo.

De acordo com Sampaio (2004), define-se topologia de uma superfície o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando a ela é aplicada qualquer uma das seguintes deformações:

(1) Esticar ou inflar a superfície;

(2) Encolher a superfície ou partes dela;

(3) Entortar a superfície ou partes dela;

(4) Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada.

Quando duas superfícies têm a mesma topologia, diz-se que elas são topologicamente equivalentes, ou que são superfícies homeomorfas.O conjunto de aspectos geométricos que se alteram quando aplicada alguma das deformações citadas acima é denominado geometria da superfície.

Algumas superfícies são definidas de modo abstrato a partir de colagens estratégicas de pares de arestas de regiões poligonais planas. A seguir são apresentados alguns exemplos dessas superfícies assim como seus diagramas planos. Isto significa, que após a colagem, os já citados habitantes fictícios e bi-dimensionais dessa superfície, ao cruzar, por exemplo, a aresta superior, emergem para dentro da superfície por meio da aresta inferior. De modo análogo para as arestas da esquerda e da direita. A seguir são apresentados alguns exemplos dessas superfícies assim como seus diagramas planos.

O primeiro exemplo é o toro. Para sua construção, a região poligonal plana que será tomada como ponto de partida é o retângulo. Para produzir o toro plano, colam-se as arestas opostas do retângulo, uma nas outras. O toro plano é representado por um diagrama retangular. As setas demarcadas no retângulo indicam que as arestas com setas simples serão coladas uma sobre a outra, assim como as arestas de setas duplas. Após a colagem, os quatro vértices do retângulo tornam-se um único ponto.

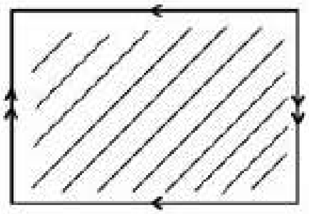


Figura 1 – Representação do toro em 2-D.

Na Figura a seguir há a representação de um toro construído no espaço tridimensional euclidiano, obtido por meio das instruções de colagens dadas anteriormente e da aplicação de algumas transformações topológicas. Esta superfície é denominada toro bidimensional ordinário. Após a colagem, o retângulo desaparece, uma vez que ao contrário do retângulo, a superfície do toro plano não tem bordo.

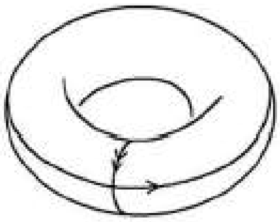


Figura 2 – Representação do toro em 3-D.

O segundo exemplo de superfícies definidas abstratamente é a garrafa de Klein plana, que é construída da seguinte maneira: toma-se como ponto de partida um retângulo, cola-se a aresta superior na inferior, como na construção do toro plano. Em seguida, cola-se a aresta esquerda na direita, após a aplicação de uma “retorção” de 180 graus numa das exetremidades da faixa retangular. A seguir, a representação plana da garrafa de Klein.

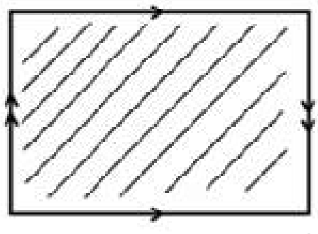


Figura 3 – Representação plana da Garrafa de Klein.

A Figura 4 mostra a tentativa de se construir a garrafa de Klein no espaço euclidiano tridimensional. No quinto estágio da construção, uma das extremidades do tudo cilíndrico tem que passar “através” da superfície, para que os pontos A,B,C possam ser colados sobre os pontos A’,B’ e C’, respectivamente. Como cortar a superfísie, da forma necessária, não é uma transformação topológica, a única saída é construir a garrafa a partir de uma película “fantasma”. Assim, a superfície da garrafa passa através de si mesma, sem, contudo, se auto-interceptar.

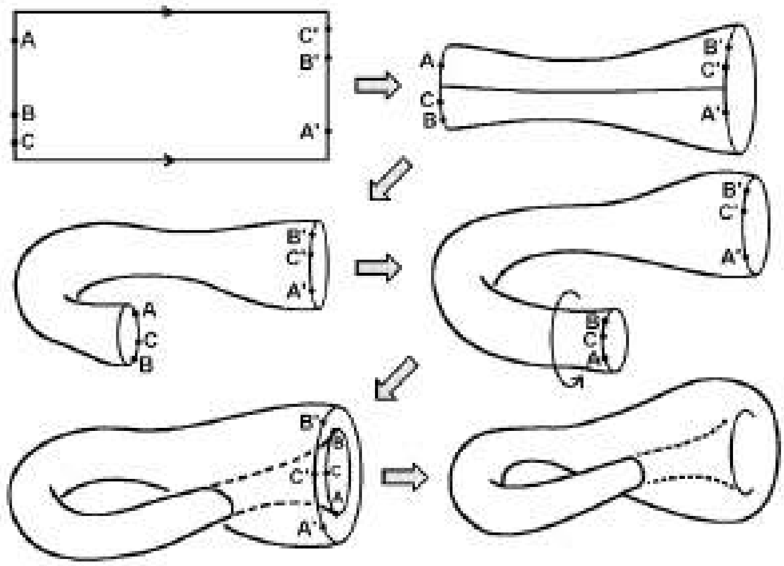


Figura 4 – Construção da Garrafa de Klein em 3-D.

O próximo e possivelmente mais famoso exemplo de superfícies definidas abstratamente é a faixa de Mobius, que pode ser construída tomando uma faixa do retângulo e utilizando para a construção em $2-D$ da garrata de Klein, aplicando a ela uma "retorção"de 180 graus e colando as setas duplas, como pode ser visto na Figura 5.

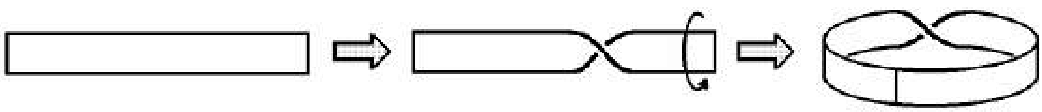


Figura 5 – Construção da faixa de Möbius.

Ainda sobre a faixa de Mobius, uma consideração importante deve ser feita - se um simpatico quadrado for um "habitante"da faixa de Mobius, e resolver passear por ela até alcançar novamente sua posição inicial, ela chegará a esta de "cabeça para baixo", como visto na Figura 6. E por esta razão, diz-se que o caminho percorrido pelo quadrado é um caminho que inverte orientação.

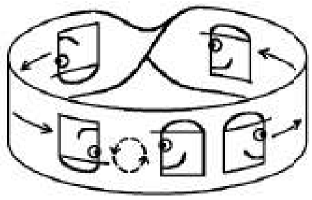


Figura 6 – Passeio pela faixa de Möbius.

Superfícies contendo um caminho fechado que inverte orientação são chamadas superfícies não orientáveis. Para confirmar que uma superfície é não orientável, basta verificar que ela contém em si uma faixa de Mobius. Superfícies que não contém dentro de si uma faixa de Mobius são chamadas superfícies orientáveis. A garrafa de Klein é uma superfície não orientável, enquanto que o toro bidimensional é orientável.

Uma superfície é fechada quando não tem bordo, e ao mesmo tempo, pode ser dividida em um número finito de triângulo. Supõe-se que um triângulo numa superfície é uma porção da superfície homeomorfa a uma região triangular plana. Uma coleção de triângulos de uma superfície é chamada uma triangulação da superfície se obedecer as regras a seguir:

(1) Cada par de triângulos da coleção tem em comum uma aresta ou um vértice, ou nada tem em comum;

(2) Cada aresta de um desses triângulos é comum a exatamente dois triângulos;

(3) Para cada par de pontos A e B da superfície, existem triângulos $\Delta_1, ..., \Delta_n$, com A na região triangular Δ_1 e B na região triangular Δ_n, tal que cada dois triângulos consecutivos desta sequência têm uma aresta em comum. Esta condição garante que a superfície é conexa por caminhos, isto é, para cada dois pontos A e B da superfície, se pode ir de A até B por um caminho traçado em uma faixa de triângulos.

Como exemplo de uma superfície não fechada tem-se o plano euclidiano, que apesar de não ter bordo, não pode ser subdividido em um número finito de triângulos. um retângulo no plano também não é uma superfície fechada porque tem bordo. A esfera, o toro, a garrafa de Klein são superfícies fechadas.

Um resultado importante em Topologia garante que todas as superfícies fechadas concebíveis, são construídas por meio de um número finito de somas conexas entre alguma(s) da(s) quatro superfícies básicas: a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo. Intuitivamente, a soma conexa é realizada da seguinte forma: considere duas superfícies separadas A e B, mas próximas. Em seguida, corte e remova uma pequena região circular de cada uma das superfícies. Assim, um pequeno bordo circular será criado nas superfícies A e B. Por fim, estique um pouco seus bordos circulares, fazendo com que os dois bordos se aproximem e, finalmente cole os bordos circulares um no outro, obtendo a soma conexa de A e B.

A seguir um exemplo de soma conexa entre duas superfícies, um bitoro, à esquerda, e um toro, à direita.

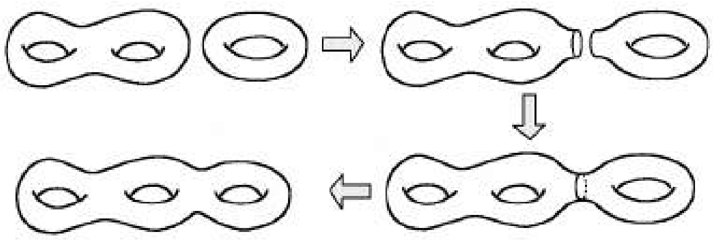


Figura 7 – Processo de soma conexa entre um bitoro e um toro.

Voltando um pouco à Historia, foi por meio da contribuição do matemático alemão Georg Friendrich Bernhard Riemann, no início do século vinte, que utilizando superfícies em seus trabalhos sobre Análise Complexa, fomentou o estudo das propriedades topológicas das mesmas. Mais tarde, Henri Poincaré foi o responsável pelo surgimento da Topologia Algébrica, que tenta utilizar conceitos da Álgebra na classificação e no estudo das Superfícies de Riemann. Outros dois ramos da Topologia são a Topologia Geral, que se dedica ao estudo da continuidade em espaços topológicos mais gerais, sem nenhuma estrutura adicional, e a Teoria das Variedades, que se deduca ao estudo das variedades, que são generalizações das superfícies.

Segundo PINTO(2004), nas últimas décadas, pesquisadores ligados à Matemática Aplicada perceberam a utilidade da Topologia para atacar certos tipos de problema, em particular os que se referem às equações diferencial não lineares. Faz-se uso da Topologia para provar, de modo qualitativo, que certos tipos de equações diferenciais não lineares admitem soluções. Mais recentemente, a Topologia tem sido utilizada como fundamentação matemática para a Teoria das Super Cordas, a mais recente teoria dos físicos sobre a natureza do Universo.

7.1.3 **Aspectos Transdisciplinares da Topologia**

É comum pensar em três grandes áreas quando se pensa em Matemática, a saber, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática, sempre lembradas como áreas totalmente disjuntas, o que não é bem verdade, ou não precisa ser... A Topologia, como disciplina, Figura nas grades dos bacharelados em Matemática Pura, eventualmente nos cursos de Matemática Aplicada e raramente nas licenciaturas. Infelizmente ainda há entre os próprios matemáticos o sentimento de que não é possível buscar regiões de interseção entre a Matemática da Academia e a Matemática da Escola. É claro que não cabe nas aulas de Ensino Fundamental e Médio estabelecer conceitos avançados de Geometria Diferencial, Análise Matemática ou Topologia, mas muitos desses conceitos e suas aplicações podem ser visualizados nas coisas mais simples e cotidianas, e ter sensibilidade para perceber e fazer uso disso em sua prática docente deve ser um desafio para todo professor de Matemática.

Nesta seção tem-se a intenção de mostrar por meio de um ponto de vista transdisciplinas, algumas dessas maneiras cotidianas de se perceber conceitos topológicos, ainda que de modo intuitivo e superficial, mas que podem servir como elementos disparadores na curiosidade e no interesse do aluno por Matemática.

7.1.4 Ladrilhagem, Eletricidade e Grafos

Existe um problema chamado “o problema da quadratura do quadrado”. De acordo com STEWART (2005), o problema consiste em responder a seguinte pergunta: “é possível ladrilhar um quadrado usando ladrilhos quadrados, todos os ladrilhos de tamanhos diferentes?’.

Em 1940, um grupo de matemáticos que se dedicava a este problema descobriu o primeiro quadrado quadriculado(ou ladrilhado com quadrados) simples. Para encontrar tal solução, inicialmente os estudos foram feitos no intento de quadricular um retângulo, que foi representado por meio de uma malha chamada diagrama de Smith. Neste diagrama, que remete facilmente às redes, ou grafos, cada linha horizontal do retângulo quadriculado corresponde a um nó, e cada ladrilho corresponde a uma aresta. Cada aresta liga os dois nós correspondentes às linhas horizontais que se encontram no lado de cima e no lado de baixo do ladrilho, e é rotulada com o tamanho desse ladrilho.

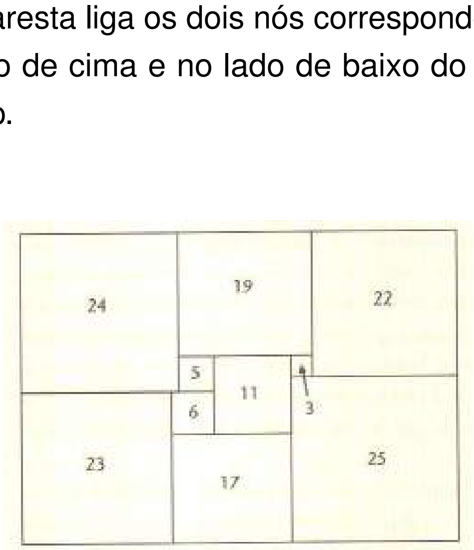


Figura 8(a)

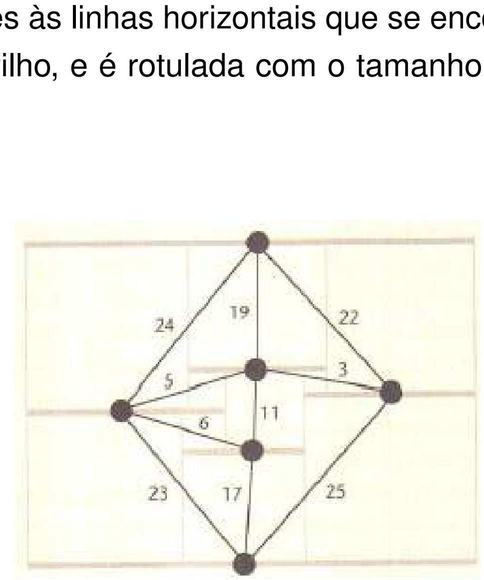


Figura 8(b)

onde a Figura 8(a) representa um Retângulo de dez ladrilhos de Móron e Figura 8(b) – Diagrama de Smith para o retângulo de Móron.

O diagrama de Smith pode também ser interpretado como um circuito elétrico, onde cada aresta representa um arame de resistência unitária e os rótulos numéricos representam as correntes elétricas que fluem pelos arames, de cima para baixo. Desta forma, o diagrama representa um circuito elétrico onde valem as Leis de Kirchhoff, que já eram conhecidas na época, fez com que o tal grupo de matemáticos fosse capaz de, a partir dos retângulos quadriculados e do que se sabia sobre circuitos elétricos, chegar a um quadrado quadriculado simples.

Brooks, um dos matemáticos que estavam empenhados na busca da solução do problema, encontrou um retângulo quadriculado de 112x75 com 13 ladrilhos, e criou um quebra-cabeças com ele, que logo em seguida foi resolvido por sua mãe, mas de uma maneira diferente, ou seja, ela foi capaz de dispor os mesmos 13 ladrilhos no mesmo retângulo de 112x75, mas numa disposição diferente da de Brooks, o que deixou o grupo abismado uma vez que isto nunca havia acontecido. Esta situação foi logo interpretada de acordo com os fundamentos das leis de Kirchhoff, em particular, da lei que trata do fluxo das correntes, que dizia que o fluxo de corrente através do circuito não era afetado se o diagrama fosse curto-circuitado em determinados pontos que estivessem no potencial elétrico.

A partir da percepção de que retângulos quadriculados de mesmo tamanho poderiam ser ladrilhados de formas diferentes, o grupo de matemáticos experimentou alterar as configurações de diagramas de Smith para alcançar o seu objetivo. E não muito tempo depois se percebeu que tomando dois retângulos quadriculados, poderia se obter um quadrado quadriculado, com a condição de que os retângulos não tivessem ladrilhos do mesmo tamanho, como na Figura 9. Algum tempo depois, em 1962, foi provado que o menor quadrado quadriculado simples possível é composto por 21 ladrilhos.

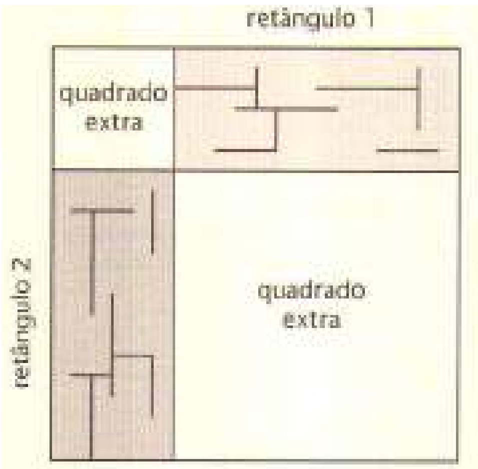


Figura 9 - Construção de um quadrado quadriculado a partir de dois retângulos.

7.1.5 **A Arte de Escher e sua Topologia Intuitiva**

Das superfícies definidas de modo abstrato, a faixa de Mobius é, talvez, a mais instigante, tanto que há muito tempo extrapolou os limites da Matemática despertando o interesse de estudiosos de outras áreas do conhecimento humano, seja por sua beleza estética, por suas implicações na formulação de teorias de outras áreas, como a emergente teoria do Revirão, do psicanalista e desenhista brasileiro Magno, Machado Dias, ou simplesmente por curiosidade.

A faixa de Mobius teve destaque na obra do renomado artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, conforme apresentado na Figura 10, onde 10(a) três faixa de Mobius aparecem entrelaçadas, e 10(b) formigas andam continuamente pelos supostos dois lados da faixa, sem perceber que caminham continuamente num mesmo lado. Escher foi apresentado à faixa por um amigo matemático, e se inspirou para construir as gravuras a seguir.

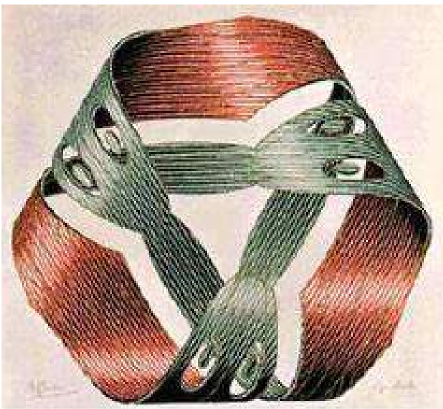


Figura 10(a)

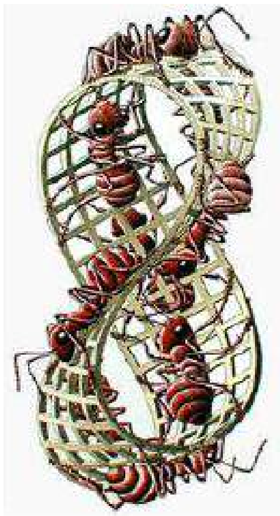


Figura 10(b)

Na Figura 10(a) – Möbius Strip I, 1961 e Figura 10(b) – Möbius Strip II,1963.

Escher foi o primeiro valorizado pelos matemáticos, e só algum tempo depois teve sua obra reconhecida pela classe artística. Isto se deu pela forma com que Escher construía suas xilogravuras e litografias, com forte presença de conceitos matemáticos, explorando construções aparentemente tridimensionais, mas que só são possíveis no plano, como exemplificado na Figura 11. É impossível construir uma fonte conforme a litografia de Escher no mundo real.

Figura 11- Waterfall, 1961.

Escher valorizava em sua obra o preenchimento regular do plano, explorações do infinito e, metamorfoses, onde partia de padrões geométricos entrecruzados e as transformava gradualmente em formas completamente diferentes, como na Figura 12, onde a pavimentação dá origem aos pássaros.

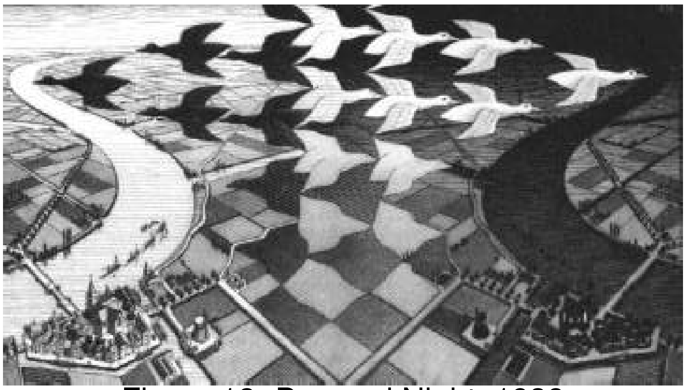


Figura 12- Day and Night, 1938

Outra característica da obra de Escher, é que a topologia das Figuras que utiliza é preservada quando estas são deformadas continuamente para construir outras Figuras, como no caso dos losangos para os pássaros, na Figura 12. O mais interessante disso tudo é que Escher não tinha a menor ideia dos conceitos matemáticos que estavam por trás de sua arte, nunca foi um bom aluno, e nem mesmo conseguiu se diplomar no colégio, o que deixava os matemáticos ainda mais fascinados por sua obra.

7.1.6 **Considerações Finais**

O intuito deste trabalho foi o de mostrar que sob um ponto de vista intuitivo e transdisciplinar é possível perceber que conceitos de áreas da Matemática tidas como mais abstratas, como é o caso da Topologia, podem ser percebidos no cotidiano de qualquer tipo de pessoa, e com isso, mostrar que a Matemática, é também uma atividade humana.

7.2 ARTIGO 2: A TOPOLOGIA: CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS E IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

7.2.1 O Objetivo da Topologia

Consideremos as seguintes perguntas:

- Qual é o comprimento desta sala de aula?
- Qual o ângulo feito por aquelas duas paredes?
- Qual área desta sala?
- Qual à distância do centro da cidade para a Universidade de Feira?
- Aonde vamos hoje à noite?
- Você é vizinho de Paulo?
- Maria derramou o café fora da xícara?
- José se encontra separando de Maria?
- O móvel já está dentro da sala?
- Qual a divisa(fronteira) entre Sergipe e Bahia?
- A porta está aberta ou fechada?

Agora tentemos "comparar" as quatro primeiras perguntas acima com as demais. Desta comparação podemos chegar a muitas conclusões: naturalmente, porém, vamos nos restringir àquela que nos interessa. para responder às quatro primeiras perguntas mencionadas, você pode fazê-lo por intermédio de um número, de uma quantidade. Nesse sentido, chamemos a essas quatro perguntas de "perguntas quantitativas ". E quanto às demais perguntas? Obviamente, elas poderão ser perfeitamente respondidas sem o emprego de qualquer número para representar uma quantidade. Nesse sentido, chamemos a essas perguntas de "perguntas qualitativas". Entre os dois grupos de perguntas acima, há, então uma diferença notável: o primeiro grupo está relacionado à quantidade do objeto, do fenômeno, etc. enquanto o segundo grupo se relaciona com a qualidade.

Os numerosos objetos e fenômenos que nos cercam estão em permanente movimento, mudança, etc. Apesar disto, aos nossos olhos eles se distinguem uns dos outros. Esta discriminação é devida ao seu duplo aspecto: quantitativo e qualitativo. Aparentemente há uma diferença, uma quase oposição entre esses dois aspectos, porém, entre eles existe uma grande unidade indissolúvel.

Qualquer Ciência estuda a realidade. A riqueza inesgotável da realidade justifica o aparecimento de numerosas ciências e é responsável pelo seu desenvolvimento.

A matemática não é uma exceção à regra acima, pois, obviamente, ela é uma ciência. Algumas pessoas ingênuas consideradas sabidas costumam afirmar que a matemática estuda somente o aspecto quantitativo das coisas, dos fenômenos, etc. Segundo essas pessoas, a Matemática é a ciência da “quantidade”, isto é a ciência do “número”.(Observem só a confusão que elas fazem entre quantidade e número). A afirmação de que a matemática estuda apenas o aspecto quantitativo dos objetos, dos fenômenos, processos, etc. será verdadeira? O desenvolvimento desta ciência mostra que não. Há na matemática, diversos ramos independentes, por assim dizer, do número e das noções de quantidade. Um exemplo conhecido pelos alunos do Ensino Médio ou graduação: A Geometria Projetiva ou Descritiva. mais diante tomaremos contato com outro ramo do conhecimento matemático que é mais "qualitativo"do que quantitativo.

Retornaremos, agora, aos dois grupos de perguntas propostas acima. Você conhece alguma "parte da Matemática"que estuda o primeiro grupo, dando-lhe respostas satisfatórias? A mesma pergunta para o segundo grupo.

A primeira pergunta será, com certeza, respondida prontamente por você: "A Geometria que estudei nos primeiros anos escolares". Quanto a segunda podemos lhe assegurar que existe uma "parte"da Matemática, na qual você encontrará respostas satisfatórias envolvendo os conceitos sublinhados no segundo grupo de perguntas acima. Esta "parte"da Matemática chama-se Topologia. Portanto, noções de vizinhança, fora, dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo, são noções topológicas; Claramente, estas noções costumam vir associadas à outras tais como: adjacências(proximidade), ordem, etc., as quais, igualmente se incluem no rol das noções topológicas. Quando eu digo: "estou junto com você", emprego, por assim dizer, uma linguagem topológica ou seja, nesta frase, emprego noções topológicas.

A experiência nos coloca em contacto ora com corpos duros, ora com corpos macios os quais, quando submetidos à forças suficientes podem ter a sua forma ou tamanho alterados. Um corpo duro pode ser idealmente transformado em um corpo rígido, isto é, um corpo que não sofre qualquer mudança no seu tamanho ou na sua forma quando em movimento. Dizemos, então, que a forma e o tamanho de um corpo rígido são invariantes quando submetido ao movimento ou, em linguagem mais sofisticada: as propriedades métricas de um corpo rígido são invariantes sob a transformação do movimento. Na Geometria de Euclides nós estudamos as propriedades métricas dos corpos rígidos quando submetidos a deslocamentos tais como translação e rotação. A Geometria Euclidiana estuda, pois, aquelas propriedades das Figuras que permanecem invariantes nos deslocamentos.

Consideremos o quadrado abaixo:

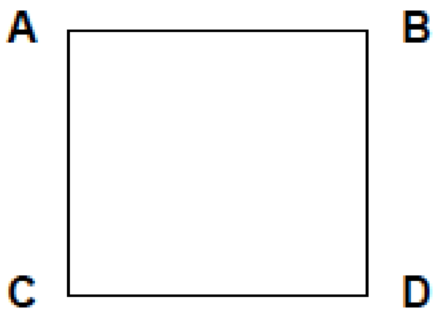


Figura 13

Rotulemos algumas propriedades dessa Figura:

1. O lado AB mede 5 cm.

2. Seus quatro lados são iguais.

3. A distância do lado AC à margem esqueda é de 5,5 cm.

4. Todos os seus ângulos são iguais;

5. A Figura divide o plano em três conjuntos de pontos:

a) os pontos que estão dentro dela;

b) os pontos que estão sobre as suas quatro linhas;

c) os pontos que estão fora dela.

De todas as propriedades acima mencionadas apenas a última não é estudada na Geometria de Euclides; as demais se caracterizam por suas propriedades métricas e, pertencem a essa Geometria. A propriedade assinalada por último não é uma propriedade métrica, ela não pode ser medida, não é associada a nenhum número; é uma "propriedade qualitativa"e, por conseguinte, pertence à Topologia.

Consideremos, agora, as duas Figuras abaixo que se seguem,

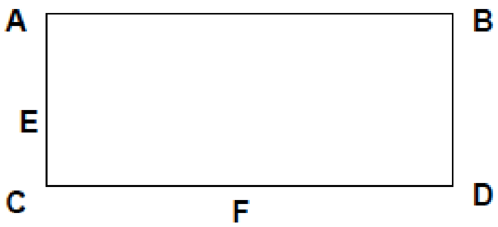


Figura 14

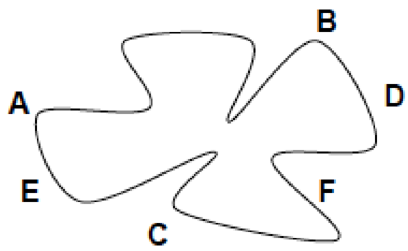


Figura 15

Qualquer pessoa de "bom senso"dirá imediatamente: não há nenhuma coisa em comum a essas duas Figuras. A segunda é uma "deformação"da primeira e pode lembrar tudo, menos o retângulo da sua esquerda. No entanto, um exame mais atento revela o seguinte: apesar de toda a "deformação"apresentada pela segunda Figura em relação à primeira, algumas propriedades permaneceram invariantes pela distorção. Quais são elas? Observe que ambas as Figuras, os pontos E,D e F permanecem, respectivamente, entre os pontos A e C, B e F, C e D. Apesar, pois, de toda a sua distorção, a Figura da direita conserva, para os pontos citados, mesma ordem dentro da qual eles se apresentam na Figura a sua esquerda. Aqui, estamos na presença de uma transformação topológica, uma vez que a transformação que levou a Figura retangular à da direita conservou a ordem dos pontos citados, embora não conservados a retidão dos lados e os ângulos tenham sofrido alterações profundas.

Consideremos outra transformação, aquela que transforma um círculo em um oito. Esta transformação é topológica? Observe que podemos ter no círculo dois pontos distintos A e B, os quais, após a transformação, podem se apresentar no oito, em contacto; logo, trata-se de uma transformação que não transforma todos os pontos distintos do círculo em pontos distintos na segunda Figura. Portanto, não é uma transformação topológica. Imaginemos uma bola de couro e recalquemos uma parte de sua superfície. Pode-se apresentar duas situações:

a) O recalque provoca na superfície apenas um pequeno rebaixamento. Não há rimpimento do couro.

b) O recalque provoca na superfície um buraco; o couro foi rompido.

Observe que na transformação (a) permanecem invariantes duas propriedades topológicas, quais sejam, o interior e o exterior, enquanto que na transformação (b) não permanece a conservação acima mencionada. Nesta última transformação, pontos que eram vizinhos e permaneceram vizinhos em (a) simplesmente deixam de ser vizinhos. Portanto, a vizinhança não é conservada, e consequentemente a transformação (b) não é uma transformação topológica.

A Topologia é um ramo bem recente da Geometria. Pelos exemplos dados acima, conclui-se que ela se preocupa com o aspecto qualitativo dos objetos e nesse sentido ela independe do número.

7.2.2 **Curvas**

Considerando intuitivo o conceito de curva, consideremos por exemplo a hipérbole

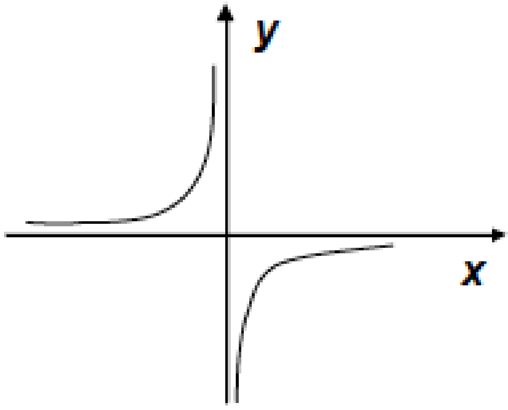


Figura 16

ela possui dois ramos(duas "partes"); porém, um círculo possui só uma parte e, por isso, é uma curva conexa. Exemplo de uma curva conexa é a lemniscata, a qual se assemelha a forma de gravata "borboleta". Há alguma diferença entre um círculo e uma lemniscata? Há várias, porém, aquela que é do nosso interesse consiste no seguinte: esta última curva se intersecta a si mesma, enquanto o círculo não se intersecta a si mesmo. Assim definimos: uma curva conexa que não se intersecta a si mesma é chamada curva simples. Porém entre as curvas simples, temos, exemplificando, o círculo, a elipse, a parábola.

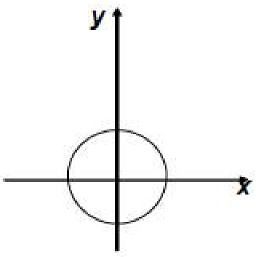


Figura 17

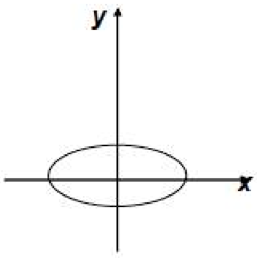


Figura 18

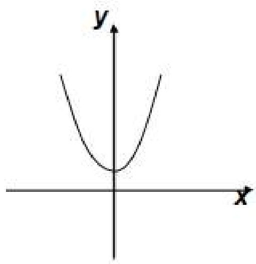


Figura 19

Há alguma diferença entre as duas primeiras e a última? A diferença que nos interessa é a seguinte: as duas primeiras são curvas fechadas, enquanto a parábola não o é; Definamos melhor uma curva fechada: Sejam duas funções contínuas. $x = f(t)$ e $y = g(t)$, ambas definidas no intervalo $a \leq t \leq b$; dizemos que estas duas funções contínuas definem uma curva fechada quando:

$$f(a) = f(b) \;\; e \;\; g(a) = g(b).$$

Relacionando ao conceito de curva fechada, pode ser citado o teorema de Jordan: “Uma curva simples e fechada C de um plano, divide-o em dois domínios: um interior e um exterior”.

Desde os primeiros anos escolares estamos acostumados com a definição de círculo: "lugar geométrico de todos os pontos desse mesmo plano que são equidistantes de um ponto dado nesse plano". O que caracteriza esta definição é uma mesma distância, isto é, a distância de qualquer ponto dessa curva a um ponto fixo dado do mesmo plano possui sempre o mesmo tamanho. Ora, distância, comprimento podem ser alterados sob uma transformação topológica e, para serem bem caracterizados necessitam de uma medida e, portanto são propriedades métricas. A definição dada é uma definição métrica. Como é a definição topológica do círculo? Ora, do ponto de vista da Topologia, esta Figura não pode ser definida com o emprego de igual comprimento ou outros conceitos equivalentes uma vez que estes não pertencem a essa ciência; a definição topológica em apreço há de empregar propriedades topológicas do círculo. Quais são essas propriedades? Apenas duas: interior e exterior(fora e dentro); logo, o círculo se caracteriza por dividir todo o plano em duas partes: uma que lhe é interior e outra que lhe é exterior. A abrangência de uma tal definição é indiscutível pois podemos afirmar que o círculo é, topologicamente equivalente a qualquer outra curva, a qual possua essa propriedade: dividir todo o plano em duas partes: interior e exterior, não importando o grau da deformação da Figura. São topologicamente equivalentes, por exemplo, o círculo, o quadrado, o retângulo, o losângulo, etc. Se estas Figuras são topologicamente equivalentes, isto significa que uma qualquer delas pode se converter em outra qualquer, sob uma transformação topológica. Dizemos, também, que elas são homeomorfas. Dentro desta mesma linha de raciocínio, podem acrescentar que um círculo não é homeomorfo a um segmento de reta, uma coroa circular não é homeomorfo ao interior de um círculo.

Seja E um espaço topológico. A um subconjunto de E. Se A é homeomorfo a um círculo, dizemos que A é uma curva fechada simples de Jordan. O homeomorfismo é uma relação de equivalência(isto é, a relação R em um conjunto A possui as propriedades de ser reflexiva, simétrica e transitiva); fundamental na Topologia Geral.

7.2.3 **Uma Brincadeira Topológica com as Letras do Alfabeto**

Consideremos as nossas conhecidas letras:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,\ I,\ J,\ L,\ M,\ N,\ O,\ P,\ Q,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ X,\ W,\ Y,\ Z.$$

Suponhamos que elas sejam elásticas e suficientemente deformáveis para a brincadeira que vem a seguir. Nós queremos verificar quais os grupos de letras topologicamente equivalentes. Por exemplo, as letras T e Y são topologicamente equivalentes. Porque? Porque eu posso transformar uma na outra, sem rompimentos e sem coincidência de dois pontos distintos. A transformação de T em Y, também pode ser feita facilmente. Existem outras letras topologicamente equivalentes as duas citadas? Todas as seguintes são topologicamente equivalentes às letras T e Y:

$$E, F, G$$

Assim, temos o primeiro grupo no qual as letras são topologicamente equivalentes:

$$E,\ F,\ G,\ T,\ Y\ \ (1)$$

Com um pouco de atenção e paciência, podem ser formados os demais grupos:

$$C,\ I,\ J,\ L,\ M,\ N,\ S,\ U,\ V,\ Z,\ W\ \ (2)$$

$$D,\ O\ \ (3)$$

$$K,\ X\ \ (4)$$

$$A,\ R\ \ (5)$$

Você deverá exercitar-se também em responder corretamente à perguntas desse tipo:

a) Porque a letra G não é topologicamente equivalente à letra C, por exemplo?

Para a transformação de G em C, seria necessário “amassar” um pouco aquela letra e isto faria com que pontos distintos de G, coincidissem após o “amassamento” o que não é permitido.

7.2.4 **Alguns Problemas de Natureza Topológica**

A Topologia Geral é um dos mais recentes desenvolvimentos da Matemática, porém, suas ideias remontam à antiguidade.

Aqui, estamos interessados em mencionar algumas “situações topológica”, das quais seja possível, pelo menos pressentir a importância dessa disciplina.

1º Problema: Fazer a ligação de gás, água e eletricidade para três casas, de maneira que as instalações não se cruzem. (Não é possível).

2º Problema: Seja um poliedro simples (em um poliedro simples podemos deformar sua superfície de uma maneira contínua até transformá-la na superfície de uma esfera, tetraedro, cubo, pirâmide, etc.) Suponhamos que submetemos este poliedro e uma transformação topológica:torcemos suas arestas, dobramos susas faces, enfim, fazendo tudo aquilo permitido em uma transformação topológica. Problema: quais as propriedades que permanecem invariantes quando um poliedro simples é submetido a uma transformação topológica? A resposta é dada pelo Teorema de Descartes - Euler : em todo poliedro simples se verifica a seguinte relação

$$V + F = A + 2.$$

3º Problema: considere uma folha de papel retangular, como mostrado na Figura abaixo:

Figura 20

Problema: é possível com essa folha retangular de papel que é uma superfície de duas faces, fazer uma outra superfície que apresenta apenas uma só face?

Sim é possível, basta construir uma faixa de Mobius que é uma superfície de apenas uma face.

4° Problema: Será que é possível fazer um buraco em uma folha de papel ofício ou mesmo do tamanho de uma página de um de nosso livros escolares, tal que um homem possa passar por ele? A resposta é positiva. A resolução é fácil; inicialmente pegue a folha de papel e dobre-a ao meio. Corte o papel dobrado seguindo as linhas da Figura; agora desdobre a folha e verifique se o buraco feito não lhe cabe inteiramente, deixando você passar inteiramente por ele.

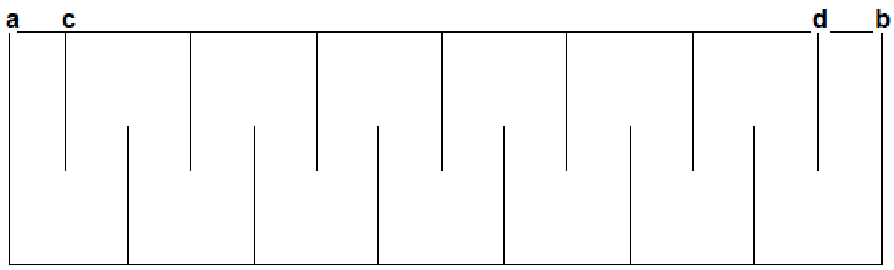


Figura 21

Não se espante pois a mesma coisa pode ser feita usando-se tão somente um pedaço de papel do tamanho de um selo de correio; para isto basta apenas aumentar suficientemente a quantidade de cortes.

Os problemas apresentados acima mostram que a Topologia é um ramo matemático qualitativo, uma disciplina "que trata de coisas que podem ser expressas sem medida ou número"para usar uma frase do matemático alemão Félix Hausdoff (1868 - 1942), o qual deu importantes contribuições a essa disciplina.

7.3 ARTIGO 3: TOPOLOGIA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

7.3.1 Resumo

Este artigo descreve a aplicação de uma Unidade Didática, a qual é composta por uma sequência de atividades. As atividades foram compartilhadas com os professores da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná, por meio de um grupo de trabalho(GTR) e desenvolvidas com uma turma da sexta série do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Cruzeiro do Oeste, com o intuito de construir algumas noções topológicas, bem como mostrar conceitos utilizados na Topologia que são a base para qualquer aprendizado que envolva tal conteúdo. Este texto tem como objetivo descrever os resultados obtidos mediante a aplicação com os alunos e o parecer dos Professores em relação ao material elaborado para o desenvolvimento de noções introdutórias à aprendizagem de conceitos de Geometria não-eucliana, especificamente de Topologia.

7.3.2 Introdução

O Governo do Paraná lançou em 2007 o PDE - Programa de Desenvolvimento Educacional que consiste em uma política pública que estabelece o diálogo entre os professores da Educação Superior e os da Educação Básica, através de atividades teóricas-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaese.

Dentre as atividades desenvolvidas durante este Processo de Formação continuada que se deu no ano de 2008, destaca-se neste artigo a Universidade Estadual de Maringá que resultou na produção de uma Unidade Didática composta por uma sequência de atividades, com o intuito de construir algumas noções topológicas, bem como mostrar conceitos utilizados na Topologia que são a base para qualquer aprendizado que envolva tal conteúdo.

A apresentação destes conceitos envolveu sugestões de atividades práticas, buscando oferecer aos alunos: aspectos históricos, introdução ao conhecimento de Topologia, atividades lúdicas, resolução de problemas, transformações topológicas, exemplos de estruturas topológicas e diversas noções inerentes à Topologia. Nas atividades buscou-se viabilizar o desenvolvimento lógico dos alunos em determinados tipos de problemas, valorizando as atividades de resolução de problemas por meio de questões investigativas e históricas.

7.3.3 Geometria Euclidiana

A matemática na concepção atual de ensino é expressa com um saber vivo, dinâmico, construído historicamente para atender as necessidades sociais, econômicas e teóricas. A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitem ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios. Nesse sentido a geometria é uma das áreas propícias de ensino de matemática que proporciona ao aluno desenvolver um papel ativo, pois permite experimentar e fazer explorações e investigações que vão muito além de memorizações.

Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos.

Ainda hoje, os conceitos vistos em geometria é a de que as teorias e as propriedades são verdades absolutas, isso porque os alunos somente tem tido contato com a Geometria Euclidiana. Raramente são trabalhados outros tipos de geometrias. Cabe ressaltar que, as outras geometrias, surgiram inicialmente por meio da tentativa de se negar um dos axiomas Euclidianos.

O conteúdo de geometria no ensino fundamental fundamenta-se principalmente nos conhecimentos geométricos, os quais se restringem aos saberes advindos da geometria estabelecida na Grécia. A obra Elementos de Euclides foi um importante marco na história da geometria e tornou-se referência.

Euclides buscou o ideal de uma organização axiomática para a geometria, ou seja, um sistema formado por noções primitivas, definições, axiomas e teoremas. Os axiomas são o começo dessa cadeia dedutiva e são as afirmações não demonstradas que Euclides chamou de postulados.

Para melhor entender o que segue, é importante destacar os 5 postulados de Euclides.

1. Dois pontos determinam uma reta.

2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.

3. É possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. Se uma reta r corta duas outras retas s e t (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores(α e β) de um mesmo lado de r é menor que dois

retos, então s e t, quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r.

7.3.4 Geometria Não-Euclidiana

Na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, os matemáticos sempre se esbarravam em outras afirmações, que também eram logicamente equivalentes ao quinto postulado. Mas a revolução definitiva no modo de encarar a própria natureza do conhecimento geométrico ocorreu no início do século XIX quando pesquisadores como Nikolai Lobachevski, János Bolyai e Carl Gauss resolveram investigar o que ocorreria se eles alterassem o quinto postulado de Euclides, já que pesquisadores anteriores a eles, tentaram não negá-lo, mas demonstrá-lo, utilizando os quatro primeiros postulados. Ao alterá-lo, eles descobriram que tinham uma nova geometria com várias características interessantes e únicas, hoje denominada Geometria Hiperbólica. Nasce assim, a primeira geometria denominada não-Euclidiana.

As teorias desenvolvidas no decorrer dos séculos encontram aplicações em diversas áreas do conhecimento e proporcionam meios bem mais completos para se compreender o mundo. Muitos problemas do cotidiano do homem e do mundo científico que não eram resolvidos pela Geometria Euclidiana, hoje são solucionados pelas Geometrias não-Euclidianas, que são geometrias que não possuem a mesma axiomática da Geometria Euclidiana.

7.3.5 Topologia: Uma Geometria Não-Euclidiana

A descoberta da Geometria Hiperbólica colocou por terra a crença na geometria como uma descrição exata do espaço físico e após estas descobertas abriu-se caminho para criação de muitas outras geometrias. A Topologia, objeto de estudo neste trabalho foi uma delas. O século XX foi marcado por avanços no campo da Topologia. Os estudos de Topologia abriram caminhos para a moderna teoria dos Grafos. Esses podem ser aplicados para planejar desde as redes de serviços urbanos, como água e eletricidade, até as de computadores.

Historicamente a resolução do problema das sete pontes de Konigsberg por Leonard Euler em 1736 é considerada como um dos primeiros resultados topológicos estudados. A topologia embora seja amplamente explorada no ensino superior, pode também ser explorada na Educação Básica.

Topologia é o ramo da Matemática que estuda os espaços Topológicos, sendo considerado uma das geometrias. Essa geometria estuda as transformações contínuas. Um exemplo é o desenho de um triângulo, é possível medir sua área, seu comprimento, ângulo, mas se o desenho fosse feito em uma borracha, há a possibilidade de deformá-lo continuamente, o que não varia é que na nova figura, continuam existindo, por exemplo, pontos interiores e exteriores. Este processo é o invariante de uma geometria que mede a elasticidade, que trabalha com transformações contínuas. É o estudo da geometria em que comprimento, ângulos e formas podem ser alterados por transformações contínuas e reversíveis. Nesta Geometria um quadrado pode ser transformado em um círculo, um círculo em um triângulo sem perder suas características Topológicas. Em topologia todas as formas Geométricas são uma só, porque ela estuda somente as propriedades que não se alteram com as transformações contínuas, ou seja, as que estão presentes na continuidade, por isso ela é também chamada de Geometria da Borracha, pois trata das propriedades de posição que não são afetadas por mudanças de tamanho e forma,quando movidos. Assim, a Topologia é o estudo das propriedades geométricas que permanecem inalteradas mesmo que se estique, que se encolha, que se torça, que se corte, torça e cole novamente no mesmo sentido do corte.

A Topologia é a geometria cuja relação de equivalência entre os objetos é dada por homeomorfismos, isto é, pelas transformações contínuas que podem ser continuamente desfeitas. Devido a isso os objetos na topologia podem ser representados por objetos feitos de um material perfeitamente deformável. Qualquer polígono é homeomorfo a um círculo.

Os objetos bidimensionais, isto é as superfícies, que segundo Sampaio, são objetos geométricos que não existem no mundo real, mas apenas na imaginação platônica; também são classificados sob a ótica topológica. Pode-se construir um modelo de uma superfície fazendo uso de uma película de material elástico. Bolas de plástico são modelos físicos de superfícies esféricas enquanto que modelos de câmara de ar são modelos de uma superfície denominada toro bidimensional. É possível esticar ou encolher parte ou o todo de uma superfície, que certas propriedades dela se mantém inalteradas. Tais propriedades são denominadas de topologia da superfície.

Sampaio enumera quatro deformações que não afetam a topologia de uma superfície;

1. Esticar ou inflar o objeto, ou algumas de suas partes;

2. Encolher o objeto, ou algumas de suas partes; retorcer o objeto, ou algumas de suas partes;

3. Entortar a superfície ou partes dela;

4. Cortar o objeto segundo uma linha suave nele demarcado e, posteriormente, colar uma na outra as duas bordas que foram geradas por esse corte, resgatando a superfície com a linha nela originalmente demarcada(considerando a mesma orientação).

Assim Topologia de uma superfície é definida como o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando a ela aplica-se qualquer uma das quatro deformações.

A topologia em atividades práticas parece estar dissociada da realidade do aluno de Ensino Fundamental e não aparece em livros didáticos, excluindo-se assim um saber matemático necessário ao desenvolvimento do estudante.

7.3.6 Desenvolvimento: Implementação da unidade didática com os alunos

A implementação da produção didático pedagógica - didática composta por uma Unidade Didática ocorreu com 37 alunos da sexta série do período matutino, do Colégio Estadual Cruzeiro do Oeste, na Cidade de Cruzeiro do Oeste - PR, mostrando as características do estudo da Geometria Euclidiana e não-Euclidiana estabelecendo a diferença entre elas, e dentre as geometrias não-Euclidianas, evidenciou-se a Topologia.

O trabalho foi desenvolvido por meio de uma sequência de atividades para apresentar os conceitos de Topologia na perspectiva da Metodologia da Investigação Matemática levando o aluno a usar o material manipulável e fazer conjecturas, testar as hipóteses iniciais, comunicar descobertas e construir justificativas para os fatos observados.

De acordo com as Diretrizes Curriculares, para trabalhar noções básicas de Topologia na sexta série é necessário abordar conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados, porém, no decorrer da preparação da produção pedagógica houve um aprofundamento do conteúdo além do estabelecido pelas Diretrizes. Das atividades propostas na Produção Didático Pedagógica o trabalho foi iniciado com o problema das sete pontes de Konigsberg, por ser um dos primeiros resultados topológicos, mostrando aos alunos que este problema deu origem a esta geometria.

Atividade 1 - Problema das sete pontes de Konigsberg

No século XVIII havia na cidade Konigsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel. Os moradores de Koenigsberg se perguntavam se era possível fazer um passeio pela cidade passando exatamente uma vez em cada uma das sete pontes.

Figura 23

Ao iniciar a resolução do problema todos se empolgaram e queriam traçar o caminho para passar nas sete pontes, o "alvoroço foi muito grande", e houve dificuldade em contornar a situação. O problema foi retomado no quadro e analisada a saída que alguns alunos encontraram levando-os a compreenderem que não seria possível o trajeto que tinham desenhado. Na aula seguinte a empolgação em descrever o resultado foi grande novamente. Alguns alunos disseram que passaram a tarde tentando resolver e questionaram se o problema tinha solução. Para que eles chegassem a conclusão que o problema não tinha solução, foi apresentado uma sequência de diagramas, com o propósito de explorarem a tarefa. Para resolver este problema o matemática suíço, Leonhard Euler em 1736, desenhou um diagrama transformando cada margem e cada ilha em um ponto, e cada ponte em um caminho ligando os pontos, conforme a figura ao lado(ao lado). Agora o passeio pela cidade estava reduzido ao ato de percorrer o diagrama em um único movimento do lápis sobre o papel. Ao realizar esta tarefa, nas condições propostas, todos perceberam que com somente vértices ímpares era impossível fazer o trajeto. Só era possível fazer o trajeto iniciando e terminando sem se repetir o trajeto quando todos os vértices fossem pares, porém em relação a diagramas que possuíam vértices pares e ímpares eles ficaram inseguros nas conclusões. A complexidade desta análise se revela e alguns alunos destacam o diagrama com seis pontes, observando que ele possuía dois vértices pares e dois vértices ímpares e o trajeto iniciava-se em um vértice ímpar, terminando em outro ímpar, mas apresentaram dificuldades em generalizar as conclusões. A maioria destacou nas conclusões apenas a relação do percurso poder ser ou não realizado, quando os diagramas apresentavam todos os vértices pares ou quando apresentavam todos os vértices ímpares. Diante de tantos questionamentos e as dificuldades apresentadas, foi proposto a segunda atividade.

Atividade 2 - Teste com redes de percurso

Euler após resolver o enigma do problema das sete pontes de Koenigsberg, descobriu leis importantes para as redes de percurso. Usando o mesmo raciocínio do problema das pontes os alunos estudaram os vértices e traçaram as redes, para descobrirem as relações entre vértices de redes fechadas.

Com esta atividade, os alunos relataram as ideias básicas do raciocínio utilizado por eles, apresentando várias estratégias e descobertas. Durante a execução da tarefa houve várias intervenções do professor e muita troca de informações, contribuindo para que chegassem a uma conclusão mais precisa.

FIGURAS	VÉRTICES PARES	VÉRTICES ÍMPARES	PODE SER TRAÇADA
1			
2			
3			
4			

Figura 24

Atividade 3 - Água, Luz e Telefone

É possível conectar os três serviços em cada uma das casas sem haver cruzamento de tubulação?

Figura 25

Rapidamente os alunos perceberam que diante das condições propostas o problema não apresentava solução, porém quando foi sugerido que eles explicassem usando o mesmo raciocínio de Euler, sentiram dificuldade. Com a sugestão do diagrama abaixo a análise foi facilitada.

Com o desenho do diagrama representando um mapa da situação verificam que possuiam seis vértices ímpares. Pelas relações referente as descobertas de Euler, conseguiram explicar que era impossível resolver este problema numa superfície plana.

Com a realização de todas estas atividades mostrou-se aos alunos, que as descobertas de Euler originaram uma nova geometria - a Topologia.

As redes estudas não dizem respeito a comprimento, área, ângulos ou formas das figuras, mas sim a forma pela qual os lugares são ligados por arcos. Neste momento, fez-se um paralelo entre as duas geometrias (Euclidiana e não-euclidiana) informando que:

Na geometria Euclidiana estudam-se as propriedades das figuras que mesmo quando deslocadas permanecem inalteradas, rígidas, não modifica nem seu tamanho e nem sua forma.

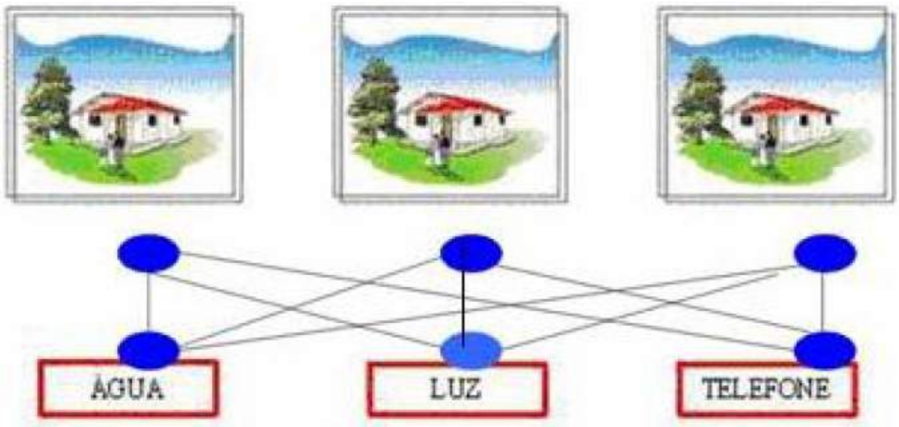
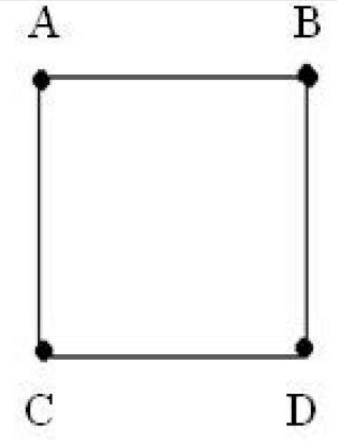


Figura 26

Em topologia, pode-se mover figuras e modificar suas formas, torcendo, esticando e esquecendo de comprimeiro, área, distância e ângulos. Na Topologia, estudam-se as propriedades das figuras que permanecem inalteradas mesmo quando sofrem distorções.

Atividade 4 - Redes, Regiões e uma Fórmula Importante

De posse do roteiro da atividade os grupos foram informados que o matemático Leonard Euler dentre suas inúmeras contribuições, deixou uma fórmula surpreendente, que eles iriam descobrir resolvendo as próximas atividades. Para entendê-la, observe a figura abaixo. Ela é denominada grafo.



Os quatro pontos (A,B,C,D) são denominados vértices. As quatro linhas são chamadas de arcos. A figura se divide em duas regiões: interior e exterior.

O que Euler fez foi descobrir uma relação entre essas três quantidades, vértice, arcos e regiões. Este grafo apresenta 4 vértices, 4 arcos e 2 regiões (uma interior e outra exterior).

Figura 27

Observe os desenhos:

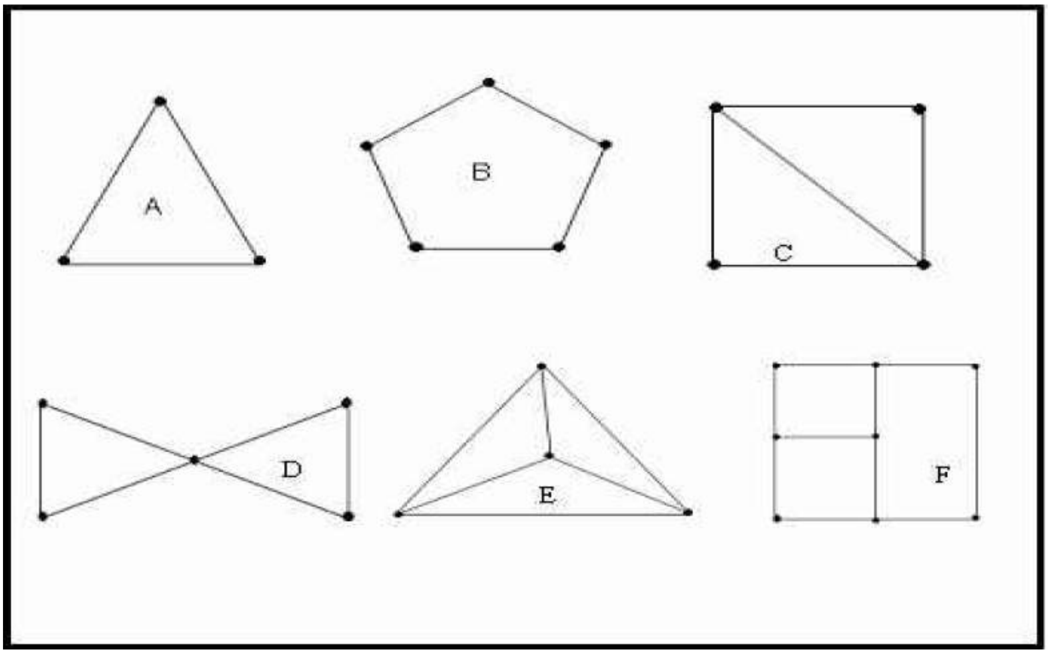


Figura 28

Complete a tabela de acordo com as ilustrações para cada uma das redes e veja se você pode estabelecer uma fórmula que relacione as variáveis V,A e R.

REDE ou GRAFO	NÚMERO DE VÉRTICES - V	NÚMERO DE ARCOS- A	NÚMERO DE REGIÕES- R
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Figura 29

Durante a aula observou-se o trabalho dos grupos e as dúvidas iam sendo esclarecidas. Nem sempre era possível atender a todos, qualquer atividade que exige do aluno pensar por si próprio, exige muita disponibilidade do professor. Eles não tiveram dificuldade em preencher a tabela. Observaram os resultados presentes em cada coluna e foram desafiados a estabelecer uma relação entre eles. Observou-se que várias conjecturas foram comuns aos grupos. Perceberam que o número de regiões sempre era duas unidades a mais que a diferença entre o número de arcos e o número de vértices. Ainda descobriram também que se eles juntassem o número de vértices com o número de regiões, sempre teriam duas unidades a mais que o número de arcos.

Eles levantaram as conjecturas, mas não consguiam generalizar. Alguns grupos apresentaram suas conclusões, as quais foram colocadas no quadro para serem analisadas. Foi solicitado que estabelecessem letras para nomear os arcos, vértices e regiões e tentassem escrever uma sentença matemática para as conclusões. Apresentaram bastante dificuldade e não conseguiam estabelecer as relações. Acredita-se que o fato ocorreu porque ainda tinham pouco contato com a linguagem algébrica. A discussão foi intensa, o "alvoroço"muito grande, todos queriam defender seus pontos de vistas, embora não chegassem a nenhum consenso. Retomou-se junto aos alunos a generalização da conclusão apresentada por eles em relação a atividade proposta, para representá-la algebricamente.

Atividade 5 - Califa Persa e os namorados de sua filha

A filha do Rei Califa possuía tantos admiradores que ele decidiu escolher aquele que fosse o melhor solucionador de problemas. O primeiro problema proposto aos namorados é ilustrado na figura ao lado. Consistia em ligar números iguais por curvas que não se cruzassem, nem cruzassem quaisquer outras curvas na figura. Aquele que resolvesse satisfatoriamente esse problema poderia, então, falar com a filha do Califa.

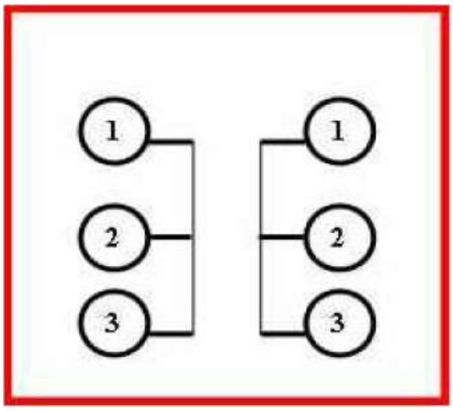


Figura 30

O Califa usou um problema de topologia(explorando as ideias de interior e exterior) para escolher um marido para sua filha. Será que a filha do Rei casou-se?

A maioria dos alunos chegaram a uma solução coerente e concluíram que a filha do rei ficou solteira. Com este problema explorou-se algumas propriedades topológicas. Um 3 ficou no interior e o outro 3 no exterior. Com as ideias que já haviam sido exploradas, retomou-se que não era possível ir do interior para o exterior sem cruzar a curva denominada fronteira. Topologicamente é impossível traçar as curvas sem que haja cruzamento.

Para aprofundar estas ideias foi trabalhado a próxima atividade.

Atividade 6 - Propriedades Topológicas

O desenho na figura 1 foi feito em bexiga e apresenta um quadrado de 2cm de cada lado com um ponto no seu interior. Ao encher a bexiga conforme a figura 2 e 3 observe o que acontece com o quadrado.

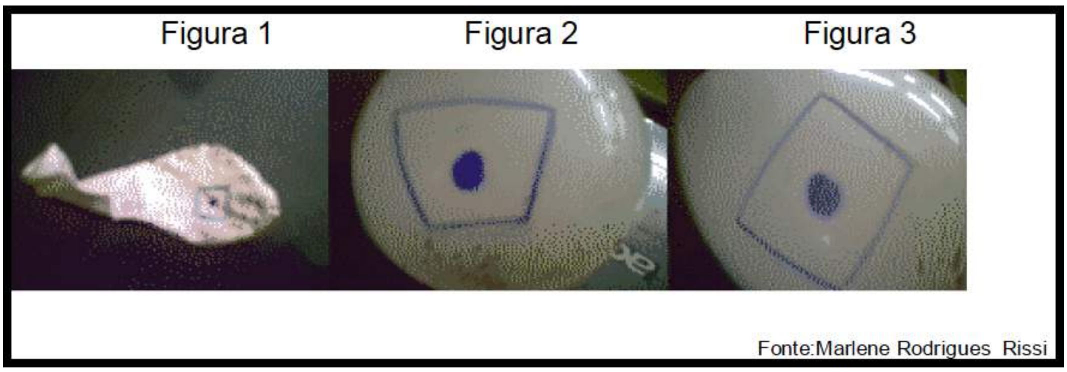


Figura 31

A atividade foi abordada no coletivo de forma expositiva, sendo que o professor fazia intervenções para que eles estabelecessem relações entre a Geometria Euclidiana e a Topologia, observando que apesar das deformações o ponto se manteve no interior da figura, e algumas propriedades permaneceram invariantes pela distorção:

- Ambas dividem o plano em duas partes - o interior e o exterior.
- O contorno da figura é denominado fronteira.
- Ambas são constituídas de uma única parte, ou seja, é possível percorrer o interior de ambas sem precisar passar pelo exterior.
- Pontos que são vizinhos no quadrado, permanecem vizinhos após a deformação.

7.3.7 Exposição dos Trabalhos

Como última ação, os trabalhos dos alunos foram expostos e apresentados nas dependências do colégio, nos três períodos letivos com a intenção de divulgar as Geometrias não-euclidianas, especificamente a Topologia, para a comunidade escolar. As atividades foram divididas em uma sequência de apresentação para que os visitantes pudessem entender os conceitos de Topologia e as comparações com a Geometria Euclidiana.

1) Apresentação do problema das pontes de Konigsberg com pranchetas e diagramas para que os participantes tentassem resolver o problema.

Figura 32

2) Quebra-Cabeça com testes de percurso de redes.

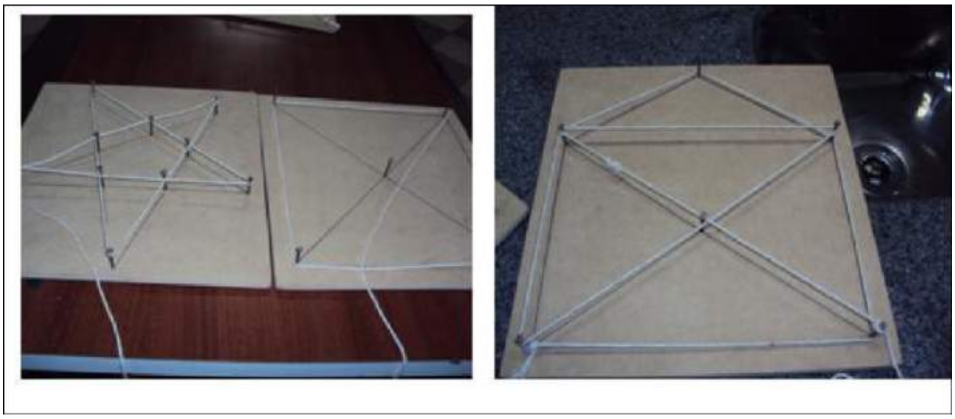


Figura 33

3) Exposição do Problema - água, luz e telefone, problema do Casamento da filha do rei califa.

Figura 34

4) Brincadeiras envolvendo conceitos de Topologia.

Figura 35

7.3.8 Implementação com os Professores

O trabalho desenvolvido com os alunos foi apresentado aos professores do município e aos professores da Rede Pública Estadual do Estado do Paraná que participaram do GRT - Grupo de Trabalho em Rede, que possibilita a integração do professor PDE com os professores da Rede Estadual de Ensino, por meio de encontros virtuais, na modalidade a distância através da plataforma Moodle. Teve como objetivo proporcionar aos participantes relações teóricas-práticas, visando o enriquecimento didático-pedagógico, por meio de leituras, reflexões, troca de ideias, de experiências e informações sobre a temática estudada.

Foi disponibilizado para os professores em forma de módulos todo o material produzido que consta o Plano de Trabalho: o Material Didático, a Proposta de Intervenção e a Proposta de Implementação do trabalho desenvolvido.

Em todas as etapas a tarefa do grupo consistia em socializar o conteúdo e fazer uma análise do material apresentado através de reflexões e contribuições. Após as discussões destaca-se algumas falas dos professores sobre o trabalho proposto.

7.3.9 Apontamento dos professores sobre o trabalho

- O Projeto Topologia: uma proposta metodológica para a Educação Básica é, sem sombra de dúvidas, muito pertinente com o momento atual pelo qual a Educação Básica do Paraná está vivenciando após a implementação das DCE's. A partir das Diretrizes Curriculares, as Geometrias não Euclidianas passaram a fazer parte dos conteúdos de Matemática da Educação Básica. É um conteúdo que boa parte dos professores não tem familiaridade e nem material de pesquisa. Percebo que a escolha do tema vem auxiliar e muito a nossa prática pedagógica no ensino das Geometrias não Euclidianas. O plano de Trabalho aborda muito bem o tema proposto, os objetivos estão bem definidos e se alcançados, irão enriquecer as aulas de Matemática. Parabenizo a professora e seu orientador por estarem contribuindo para a nossa formação nesta área ainda pouco conhecida - Geometria não Euclidiana.

- O projeto: Topologia - Uma Proposta Metodológica para o Ensino Fundamental é válido no sentido de que já existe uma discussão a respeito de implantar este tópico na rede. Talvez esse tópico já venha sendo trabalhado, mas sem a conotação de Topologia. É importante novas formas de ensinar Matemática, pois assim como as outras disciplinas, hoje tem-se muito acesso a informação, seja através de livros, revistas, internet e até mesmo a televisão, que hoje tem programas voltados à educação e ao conhecimento científico e com o tema de Topologia e sua aplicação, isto torna o ensino da Matemática mais interessante e mais desafiador.

- Vejo o estudo das Geometrias não Euclidianas, com enfoque na Topologia, como uma rica forma de agregar valores teóricos e filosóficos a nossa maneira de pensar Matemática.

- Este curso contribuiu muito para minha formação. Principalmente, porque eu pude constatar pelo material disponibilizado nele que é possível trabalhar com este tema com os alunos do ensino fundamental. Com certeza vou aproveitar todo esse material em minhas aulas.

De acordo com os depoimentos o material apresentado veio de encontro com as expectativas, poucas contribuições em relação ao material ocorreram, pois a maioria estavam tendo o primeiro contato com esta geometria no referido curso, confirmando que é um conteúdo que boa parte dos professores não tinham familiaridade. Percebe-se também que o material foi bem aceito no sentido de contribuir como subsídios teóricos e metodológicos para a introdução do conteúdo de Geometrias não-Euclidianas nas aulas de matemática.

7.3.10 Considerações Finais

Foi apresentado alguns conceitos básicos e algumas das aplicações da Topologia que podem ser tratadas em nível de Ensino Fundamental. No decorrer da implementação percebe-se que o ensino de Topologia deve estar presente no Ensino Fundamental e que sua exploração através de material manipulativo, questões investigativas, resolução de problemas e aspectos históricos proporcionaram aos estudantes comparar conhecimentos de Topologia e Geometria Euclidiana.

A Topologia, embora sendo um dos ramos mais recentes da matemática, assume uma importância muito grande na ciência e tecnologia, portanto, tem-se no estudo dessa geometria, mais uma oportunidade de articular o ensino de matemática com temas relevantes para os dias atuais.

A maior contribuição da experiência descrita neste artigo foi a de criar oportunidades aos professores envolvidos, de ter acesso a uma proposta de ensino de Geometrias não-Euclidianas. Espera-se que a aplicação deste trabalho junto aos alunos tenha contribuído para inserir o conteúdo de Topologia e o material pedagógico produzido sirva como subsídios metodológicos para os professores.

Finalmente, espera-se também que esta proposta, seja apenas uma iniciativa para que outros professores possam aprimorar e fazer contribuições no sentido de elaborar novos materiais possíveis para o ensino destas geometrias, conteúdo este, pouco explorado em sala de aula e com fonte escassa de pesquisa, para o Ensino Fundamental.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Etapa 1: Nesta etapa estudamos a Topologia e os Espaços Métricos com todo o rigor matemático, assim como é estudado nos cursos de graduação por todo o Brasil. Noções como o que é um Espaço Métrico, bolas abertas, métricas equivalentes e espaços topológicos são algumas das definições que estudamos ao longo do projeto. Para atingirmos aos objetivos estudados nesta etapa, fizemos durante o primeiro mês do PIBIC toda uma revisão sobre a teoria de conjuntos.

Etapa 2: Nesta etapa, a topologia foi vista de forma intuitiva, nossa preocupação foi em compreender se é possível ensinar esta área da matemática para alunos das escolas de Ensino Fundamental e Médio e até mesmo estudantes dos anos iniciais do curso de matemática. Para chegarmos a tal conclusão, nós estudamos três artigos sobre a Topologia aplicada ao ensino e concluímos segundos os texto estudados e discutidos que é possível tornar o conteúdo mais inteligível, ou seja, é possível ensinar tal assunto de forma que seja percebido no cotidiano de qualquer tipo de pessoa, e com isso, mostrar que a Matemática, é também uma atividade humana.

CONCLUSÃO

Por meio deste projeto, eu consegui obter um grande amadurecimento nos estudos. Devido a grande quantidade de teoremas e proposições estudadas ao longo do projeto, pude ganhar uma experiência e amadurecimento na escrita matemática e nas demonstrações dos resultados, me oportunizando um maior conhecimento na área de matemática pura. Vale destacar também que, conforme fazíamos as apresentações semanais ao longo deste 1 ano de projeto, foi perceptível uma melhora na minha fala e postura, ganhei confiança em fazer apresentações e pude melhorar a minha capacidade de ensinar matemática

Por fim, foi com o desenvolvimento deste projeto, especialmente durante a segunda etapa, que consegui enxergar a topologia sob uma perpectiva totalmente diferente daquela que geralmente é vista na universidade. Estudamos a topologia de uma forma mais intuitiva e, com isto, percebi que alunos de ensino fundamental podem aprender tal conteúdo sem grandes dificuldades desde que tenham a orientação correta.

Na minha opinião, a Topologia e os Espaços Métricos são conteúdos muito importantes para serem abordados e ensinados às crianças ainda enquanto alunos de Ensino Fundamental e Médio, uma vez que mostra que a matemática vai muito além do “fazer conta”, ela também é uma atividade humana e está presente em todo o nosso cotidiano.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil, por intermédio do Projeto PIBIC/CNPq-UFCG. E, na ocasião, agradeço ao CNPq que propiciou uma bolsa de estudos para este incrível projeto de pesquisa. Também agradeço a minha orientadora Prof. Dra. Pammella Queiroz de Sousa por tudo que fez durante este 1 (um) ano de projeto.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, Hygino H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia.** Editora da Universidade de São paulo(EDUSP), p. 01-01, 1982.

LIMA, Elon L. Análise real - Funções de uma variável. 13ª edição. **Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA)**, 2020.

BORGES, C.C. **A topologia: Considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática**- Núcleo de Educação Matemática Omar Catunda UEFS. Disponível em : http://dfisweb.uefs.br/caderno/vol3n2/CBorges.pdf. Acesso em 05 jun.2008

RISSI, M.R, Valdeni Soliani Franco. **Topologia: Uma proposta metodológica para o ensino fundamental**. Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná. Disponível em :http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2210-8.pdf

ESQUINCALHA, A.C. **Tópicos em Topologia Intuitiva**. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio de Janeiro(UFRJ). Disponível em:

https://www.yumpu.com/pt/document/read/4315753/topicos-em-topologia-intuitiva-uff

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna Ltda., 2000. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L.; **Elementos de Topologia Geral**, Textos Universitários, SBM, 2014. Nenhuma citação no texto.

MUNKRES, J. R. **Topology.** 2. ed. N. Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs.,2000. Nenhuma citação no texto.

OLIVEIRA, R. I.; **Topologia e espaços métricos**, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 22430-040, 2014. Nenhuma citação no texto.