Condições Necessárias para Existência e Convergência das Séries de Fourier: Um Estudo Inicial à Análise de Fourier

Maria Débora De Oliveira Silva [1], **Alânnio Barbosa Nobrega** [2]

RESUMO

Ao longo da história, o *Método de Fourier* tem se mostrado uma ferramenta essencial para obter soluções de equações diferenciais parciais, em especial, das três equações clássicas: *a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace.* Porém, isso só é possível para uma classe especifica de funções que podem ser expressas em uma série de senos e cossenos conhecida como *série de Fourier*. O objetivo desse trabalho é estudar as condições necessárias para que possamos assegurar a existência e convergência dessas séries. Serão trabalhados os seguintes tipos de convergência: *convergência pontual, convergência uniforme e convergência em média quadrática.*

Palavras-chave: Teoria das Séries de Fourier, Equações Diferenciais Parciais.

[1] Aluna do Bacharelado em Matemática, Unidade Acadêmica de Matemática (UAMat), UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: debora.oliveira@estudante.ufcg.edu.br

[2] Doutor, Professor Adjunto I, Unidade Acadêmica de Matemática (UAMat), UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: alannio@mat.ufcg.edu.br

Condições Necessárias para Existência e Convergência das Séries de Fourier: Um Estudo Inicial à Análise de Fourier

ABSTRACT

Throughout history, the *Fourier method* has proved to be an essential tool to obtain solutions to partial differential equations, in particular, the three classical equations: *the heat equation, the wave equation, and the equation de Laplace.* However, this is only possible for a specific class of functions that can be expressed in a series of sines and cosines known as the *Fourier series*. The objective of this work is to study the necessary conditions for us to ensure the existence and convergence of these series. The following types of convergence will be worked: *pointwise convergence, uniform convergence and mean-square convergence*.

Keywords: Fourier Series Theory, Partial Differential Equations.

INTRODUÇÃO

A criação do Cálculo Diferencial e Integral em meados do século XVII, exerceu uma grande influência sobre o desenvolvimento de novas áreas da matemática moderna, entre elas, a das *Equações Diferenciais*. As *Equações Diferenciais* foram fundamentais para expressar fenômenos clássicos da física em modelos matemáticos, mas apresentavam um empecilho: em certas condições iniciais ou condições de fronteira, encontrar uma solução para os problemas considerados básicos se tornava uma tarefa muito difícil.

Matemáticos como *Daniel Bernoulli(1700-1782), Leonhard Euler(1707-1783), Jean d'Alembert(1717-1783) e Joseph-Louis Lagrange(1736-1813)* enquanto tentavam achar uma solução para o problema da corda vibrante, estiveram muito próximos da ideia, mas foi o francês *Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)* que insistiu que era possível expressar uma classe de funções de uma variável em uma série de senos e cossenos.

Apesar de ter cometido diversos equívocos em sua teoria, *Fourier(1768-1830)* estava certo. As séries que receberam seu nome desempenham um papel fundamental em aplicações da matemática e da física, como em problemas *na condução do calor, na acústica, na engenharia hidráulica etc.* Neste projeto, foi realizado um estudo inicial da *Teoria das Séries de Fourier*, com intuito de futuramente trabalhar em resoluções de *Equações Diferenciais Parciais* utilizando o *Método de Fourier*.

MATERIAIS E MÉTODOS (OU METODOLOGIA)

O projeto foi realizado a partir de bibliografias clássicas para o estudo de *Análise e Séries de Fourier*, como os textos de (HERSH, 1981), (FIGUEIREDO, 1977), (LIMA, 1977) e (BOYCE, 2015), onde a Orientanda ficou responsável pela elaboração de exposições semanais de assuntos previamente determinados no planejamento da atividade para o Orientador. As apresentações foram realizadas via *Google Meet*, e tiveram como objetivo preparar a Aluna para a docência e para a pesquisa científica em matemática.

DESENVOLVIMENTO

O plano de estudo foi dividido em duas partes: na primeira parte foi trabalhado o processo para a obtenção dos coeficientes das *séries de Fourier* de uma função f e as condições para que essa possa ser expressa de tal forma. Para exemplificar e solidificar o conhecimento desses primeiros tópicos, foram calculadas e analisadas as *séries de Fourier* de algumas funções e discutido o motivo de outros tipos de funções não poderem ser expressas dessa maneira, como, por exemplo, em casos de funções descontinuas e funções não periódicas. Ainda nesse estudo inicial, trabalhamos a integração e forma complexa das *séries de Fourier*.

Na segunda parte, o foco central foi estudar as condições adicionais para garantirmos a convergência da *Série de Fourier* de uma função *f*, visto que ela existe. Os tipos de convergência trabalhados foram: *convergência pontual, convergência uniforme e convergência em média.*

Ao longo do projeto, obtemos resultados secundários, mas essenciais para a análise da *Teoria das Séries de Fourier*, como: *Identidade de Parseval, Desigualdade de Bessel, Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski, Núcleos de Dirac, Teorema da aproximação de Weierstrass, Teorema de Fejér, Teste de Jordan, Teste de Dini, Princípio de localização de Riemann, Primeiro e Segundo Teorema do valor médio etc.*

Por fim, fizemos uma análise topológica e analítica do *Fenômeno de Gibbs* e concluímos nossos estudos com a resolução do *Problema Isoperimétrico* utilizando *séries de Fourier*.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Enquanto buscava encontrar uma solução para a famigerada equação de condução do calor, o Matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) conseguiu expressar uma classe de funções de uma variável em uma série de senos e cossenos que hoje desempenha um papel muito importante em diversas áreas da Física Moderna. Abaixo, exibiremos a definição e algumas condições importantes para garantirmos alguns tipos de convergências.

1 SÉRIES DE FOURIER

Definição 1. *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável, então chamamos de Série de Fourier de f a expressão*

$$S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}),$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \gneq 0,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \gneq 1.$$

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, e definida por $f(x) = x^2$. Como f é uma função par, integrável e absolutamente integrável em qualquer intervalo limitado, teremos

$$\int_{-L}^{L} f = 2\int_{0}^{L} f.$$

Daí, segue que os coeficientes da série de Fourier de f são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} x^2 dx = \frac{2L^2}{3},$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} x^2 \cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

e

$$b_n = 0.$$

Fazendo, $y = \frac{n\pi x}{L}$, obtemos

$$a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\int_{0}^{n\pi} y^2 \cos y dy.$$

Integrando por partes,

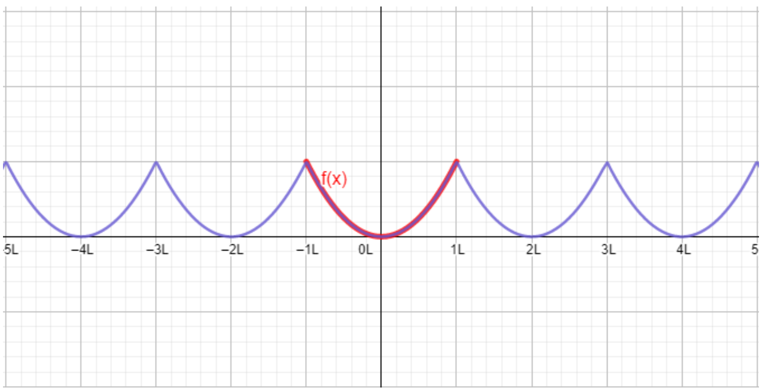
$$a_n = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\int_{0}^{n\pi} y \sin y dy = -\left(\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\right) n\pi \cos n\pi = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}(-1)^n.$$

Portanto, a série de Fourier da função f *(Gráfico na Figura 1)* é

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

//

***Figura 1**: Representação gráfica da série de Fourier da função $f(x)$*



Fonte: Próprio autor

2 CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

Como a convergência das *séries de Fourier* é um assunto bem mais delicado e complexo, apresentaremos apenas as condições necessárias para cada tipo de convergência ocultando suas devidas demonstrações.

2.1 CONVERGÊNCIA PONTUAL

Teorema 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável em [-L,L]. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

ou seja, $S_n(x)$ converge para $f(x)$ em todos os pontos de continuidade e para a média dos limites laterais de $f(x)$ nos pontos de descontinuidade.

Vale salientar que a convergência pontual pode ser estendida a uma classe mais ampla de funções que cumprem o *Critério de Dini*, critério esse também estudado durante o decorrer do projeto.

2.2 CONVERGÊNCIA UNIFORME

Teorema 2 (Primeiro Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier)**.** *Seja f uma função periódica de período 2L, contínua e com derivada primeira integrável e de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f.*

Observe que nesse caso a função precisa ser contínua em toda a reta para garantirmos a convergência uniforme. Para o caso em que f é apenas continua em um intervalo fechado, exibiremos o resultado a seguir.

Teorema 3 (Segundo Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier)**.** *Seja f uma função periódica de período 2L, seccionalmente continua e tal que a derivada primeira é integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

2.3 CONVERGÊNCIA EM MÉDIA

Teorema 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2L e de quadrado integrável em [-L,L]. Então, a série de Fourier de f converge em média quadrática para f, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} |S_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Esse tipo de convergência é ótima, pois torna somáveis séries divergentes sem perturbar as que já convergem no sentido usual, pois elas também convergem em média aritmética das reduzidas.

CONCLUSÃO

Em nosso trabalho, pudemos entender melhor a construção da elegante *Teoria das séries de Fourier* e as sutilezas matemáticas relacionadas ao assunto, constatando a força e aplicabilidade quando estudamos o clássico *Problema Isoperimétrico*. Posteriormente, pretendemos fazer o estudo da *Equação do Calor* e da *Equação da Onda* em diferentes condições iniciais e de fronteira utilizando as *Séries de Fourier*.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial do FNDE, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, através do Programa de Educação Tutorial (PET).

REFERÊNCIAS

BOYCE, R. C. D. W. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. [S.l.]: LTC, 2015. v. 1. páginas 3

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. 12-100 p. páginas 3

HERSH, P. J. D. e R. **The Mathematical Experience**. Cambridge: Boston: Birkhäuser, 1981. 255-270 p. páginas 3

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. v. 1. páginas 3