X CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE

PIBIC/CNPq/UFCG-2013

INTRODUÇÃO À ANÁLISE CONVEXA E APLICAÇÕES

João Paulo Formiga de Meneses[1], Jefferson Abrantes dos Santos[2]

RESUMO

Otimizar refere-se a estudar problemas nos quais se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais dentro de um conjunto viável. Neste trabalho foi desenvolvido vários resultados sólidos desta área da Matemática. Primeiramente, foi realizada uma introdução ao tema, definindo e analisando noções básicas deste. Em seguida, foi estudada a existência de soluções globais e as condições em que estas ocorrem em diversos problemas, com restrições de igualdade e irrestritos. Por fim, estudamos condições de otimalidade de Lagrange e de segunda ordem, que nos deram base para resolver vários problemas de minimização/maximização.

Palavras-chave: Minimizar, Soluções Globais, Lagrange

INTRODUCTION TO CONVEX ANALYSIS AND APLICATIONS

ABSTRACT

Optimization refers to the study of problems where one seeks to minimize or maximize a function by systematic choice of the values of real variables within a feasible set. We have developed several solid results in this area of mathematics. First, there is an introduction to the topic, defining and analyzing the basics of this area. Then, we study the existence of global solutions and the conditions under which they occur in various problems with equality constraints and unconstrained. Finally, we study Lagrange's optimality conditions and of second order, which give us the basis for solving various minimization or maximization problems.

Keywords: Minimize, Global Solutions, Lagrange

[1]Aluno do Curso de Matemática-Bacharelado, Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: jpaulo@dme.ufcg.edu.br
[2]Matemática, Professor Doutor, Unidade Acadêmica de Matemática, UFCG, Campina Grande, PB, e-mail: jefferson@dme.ufcg.edu.br

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, pretendemos estudar problemas de minimização sobre um subconjunto próprio do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ e sobre o próprio espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, do tipo

$$\min f(x,y) \ \ sujeito\ a\ (x,y) \in D, \qquad \text{(P)}$$

sendo D um subconjunto convexo não vazio e $f(x,y)$ uma função real convexa não necessariamente diferenciável. Para resolver esta classe de problemas são necessárias técnicas que substituem o cálculo diferencial clássico. Tais técnicas são derivadas de uma área da matemática chamada Análise Convexa. A motivação para se trabalhar com essa classe problemas é que existem várias ciências e campos da engenharia que utilizam esse tipo de problema, tais como Economia, Mecânica, Ótica, Geofísica, Química, Ciências e Biomédicas (ver [1] e [6]).

Inicialmente, na seção 1, apresentamos alguns conceitos preliminares que são abordados com mais detalhes em [3]. Em seguida, na seção 2, estudamos a existência de soluções globais, analisando quais as condições necessárias e suficientes para que o problema tenha solução. Na seção 3, o problema (P) será estudado com $D = \mathbb{R}^2$, e na sequência, na seção 4, estudamos (P) com restrições, em particular, na seção 5, com restrições de igualdade (i.e., $D \neq \mathbb{R}^2$). Por fim, na seção 6, trabalhamos com as condições de otimalidade de segunda ordem.

MATERIAL E MÉTODOS

O suporte técnico para este projeto consiste no material bibliográfico disponível na biblioteca Central da UFCG, do acervo particular do orientador e do Laboratório de Informática da UAME.

Visando atingir os objetivos deste projeto, pretendemos realizar seminários semanais onde o bolsista apresentará ao orientador os conteúdos estudados e juntos planejarão as metas da semana seguinte.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

1. Preliminares

Sejam $D, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ dois subconjuntos, com $D \subset \Omega$, e $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. O problema principal a ser considerado é o de achar um minimizador de f restrito a D. Este problema será escrito como

$$\min f(x,y) \ \ sujeito\ a\ (x,y) \in D \qquad (1.1)$$

Neste caso, denotaremos por D o ***conjunto viável*** do problema, $(x,y) \in D$ os ***pontos viáveis*** e f ***função objetivo***.

Dizemos que $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ é

(a) ***Minimizador global*** de (1.1), se

$$f(\bar{x},\bar{y}) \leq f(x,y)\,,\ (x,y) \in D \qquad (1.2)$$

(b) ***Minimizador local*** de (1.1), se existe uma vizinhança U de $(\bar{x},\bar{y})$ tal que

$$f(\bar{x},\bar{y}) \leq f(x,y)\,,\ (x,y) \in D \cap U \qquad (1.3)$$

ou seja, se existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$f(\bar{x},\bar{y}) \leq f(x,y), \forall (x,y) \in \{(x,y) \in D;\ \|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\| \leq \varepsilon\},$$

onde

$$\|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\| = \sqrt{(x-\bar{x})^2-(y-\bar{y})^2}.$$

<u>Exemplo 1.1</u>: Na figura 1.1, (x_1, y_1) é o minimizador global ($\bar{v}$ é o valor ótimo), (x_2, y_2) é um ***minimizador local estrito*** e $\{(x,y) \in \mathrm{D};\ \|(x,y)-(x_4,y_4)\| \leq \delta\}$ é um conjunto de ***minimizadores locais não estritos***.

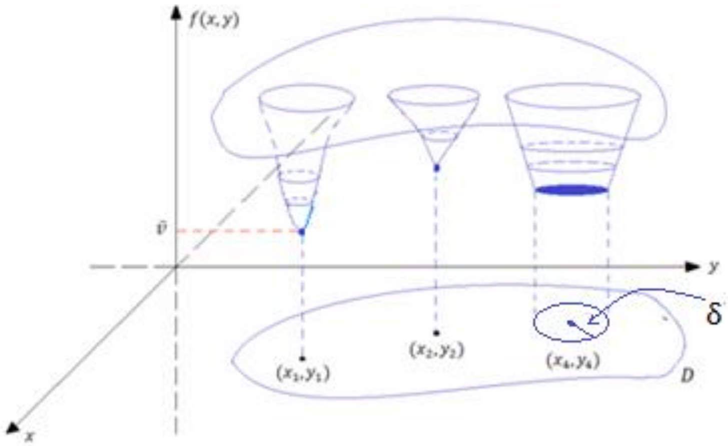

Figura 1.1

Considerando

$$\bar{v} := inf_{(x,y)\in D} f(x,y)$$

diremos que $\bar{v}$ é o ***valor ótimo*** de (1.1), desde que $\bar{v}$ seja um número real.

Quando existem uma vizinhança U de $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ e $\beta > 0$ tais que

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) \geq \beta. \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|, \forall (x,y) \in D \cap U,$$

diremos que f satisfaz a ***condição de crescimento linear*** no conjunto D em torno de $(\bar{x},\bar{y})$. Além disso, diremos que f satisfaz a ***condição de crescimento quadrático*** quando

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) \geq \beta. \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|^2, \forall (x,y) \in D \cap U\ .$$

Uma função que verifica um desses crescimentos possui minimizador local estrito. Basta observar que

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) \geq \beta. \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\| \Rightarrow f(\bar{x},\bar{y}) < f(x,y)$$

e

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) \geq \beta. \|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|^2 > 0 \Rightarrow f(\bar{x},\bar{y}) < f(x,y)$$

<u>Observação 1.1</u>: Todas as definições aqui apresentadas podem ser refeitas para o problema

$$\max f(x,y)\ \ sujeito\ a\ (x,y) \in D.$$

Uma vez que o mesmo é equivalente ao problema

$$\min\{-f(x,y)\}\ sujeito\ a\ (x,y) \in D,$$

veja a figura1.2:

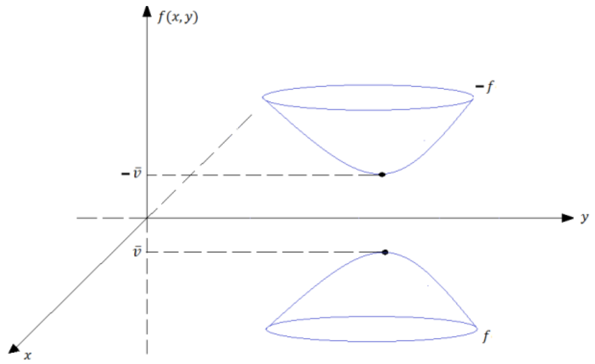

Figura 1.2

$$\max f(x,y) = -\min -f(x,y)$$

Tipicamente, o conjunto viável de um problema é definido por um sistema de igualdades e/ou desigualdades e/ou uma inclusão, como, por exemplo,

$$D = \{(x,y) \in \Omega; h(x,y) = 0, g(x,y) \leq 0\},$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $h, g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções. O conjunto Ω representa o que se chama ***restrição direta***, por ser uma restrição de inclusão e as restrições de igualdade e desigualdade se chamam ***restrições funcionais***. Vale observar que com uma simples manipulação a restrição direta pode ser transformada em restrição funcional e vice-versa.

Quando $D = \mathbb{R}^2$, dizemos que o problema (1.1) é ***irrestrito***, e quando $D \neq \mathbb{R}^2$ falamos de ***otimização com restrições***.

2. Existência de soluções globais

Caso $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ seja ilimitada inferiormente sobre o conjunto viável D, o problema (1.1) não possui solução global. Do mesmo modo, se o ínfimo de f não for atingido sobre o conjunto D, (1.1) não possui solução.

<u>Exemplo 2.1</u>: Considere $D \equiv \Omega = \mathbb{R}^2$ e

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

Note que,

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = 0,$$

no entanto, não existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = 0$.

<u>Exemplo 2.2</u>: Suponha agora que $D =]0,1] \times]0,1]$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$, com

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

Neste caso

$$\inf_{(x,y)\in D} e^{x+y} = 1,$$

e do mesmo modo o ínfimo não é atingido.

É importante observar que nos exemplos 2.1 e 2.2, $f(x,y)$ é contínua e D não é fechado, mas em um caso D é ilimitado e em outro D é limitado.

Mostraremos a seguir que D compacto e $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua são condições suficientes para obter soluções globais para (1.1).

TEOREMA 2.1 (Teorema de Weierstrass): Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto não-vazio e $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, os problemas de minimizar e de maximizar f em D tem soluções globais.

Demonstração: Provemos a existência de um minimizador (vale para maximizador). Como a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacta,

$$\{v \in \mathbb{R}; v = f(x,y) \ para \ algum \ (x,y) \in D\}$$

é compacto. Em particular, este conjunto é limitado inferiormente, ou seja, existe $\bar{v} \in \mathbb{R}$, verificando

$$-\infty < \bar{v} = \inf_{(x,y)\in D} f(x,y).$$

Utilizando a definição de ínfimo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um $(x_k, y_k) \in D$ tal que

$$\bar{v} \leq f(x_k, y_k) \leq \bar{v} + \frac{1}{k},$$

passando ao limite

$$\bar{v} = \lim_{k\to\infty} \bar{v} \leq \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq \lim_{k\to\infty} \bar{v} + \frac{1}{k} = \bar{v}$$

o que implica

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \bar{v}. \tag{2.1}$$

Como $\{(x_k, y_k)\} \subset D$ e D é compacto, segue-se que $\{(x_k, y_k)\}$ é uma sequência limitada. Logo, ela possui uma subsequência $\left\{(x_{k_j}, y_{k_j})\right\}$ que converge para um ponto de D, ou seja

$$\lim_{j\to\infty} (x_{k_j}, y_{k_j}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

para algum $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$. Segue da continuidade da função f que

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}, y_{k_j}) = f(\bar{x}, \bar{y}) \in D \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), que $\bar{v} = f(\bar{x}, \bar{y})$, mostrando que $(\bar{x}, \bar{y})$ é um minimizador global de (1.1). ■

Veremos agora que a compacidade do conjunto viável _ não é uma condição necessária para obtermos solução global de (1.1). Para isto, precisaremos da seguinte definição:

Chamaremos de ***conjunto de nível de c*** com relação à função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, o conjunto $L_{f,D}(c)$ dado por

$$L_{f,D}(c) = \{(x,y) \in D; f(x,y) \leq c\}.$$

Veja a figura 2.1

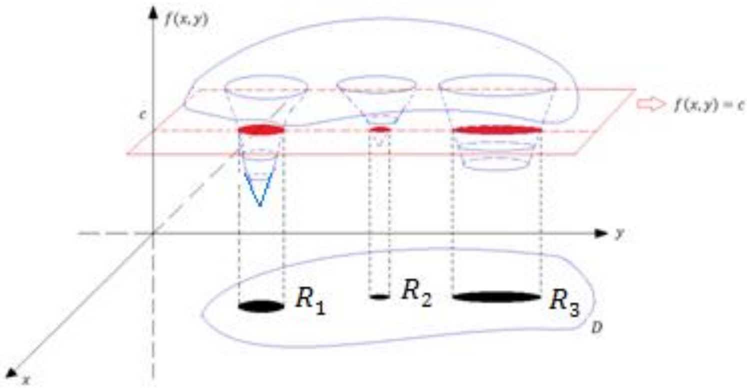

Figura 2.1

Na figura 2.1, o conjunto de nível de c, é dado por $L_{f,D}(c) = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

Corolário 2.1: Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto e $f: \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua sobre D. Suponhamos que existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $L_{f,D}(c)$ seja não-vazio e compacto. Então o problema de minimizar f em D possui uma solução global.

Demonstração: Pelo teorema de Weierstrass, o problema

$$\min f(x,y) \ \ sujeito \ a \ (x,y) \in L_{f,D}(c),$$

tem uma solução global, digamos $(\bar{x}, \bar{y})$. Por outro lado,

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq c < f(x,y), (x,y) \in D - L_{f,D}(c),$$

mostrando que $(\bar{x}, \bar{y})$ é minimizador global de f. ■

Vejamos agora um exemplo onde D é ilimitado e aberto.

Aplicação 2.1: Considere sobre (1.1),

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 0\}$$

com

$$f(x,y) = x^2 + y + \frac{1}{x+y}.$$

Afirmamos que (1.1) possui solução global.

Observe que D é ilimitado e aberto. Portanto, o Teorema de Weierstrass não se aplica neste caso. No entanto, mostraremos através do corolário 2.1 que *f* possui minimizador global. Para isto, mostraremos que $L(c) = L_{f,D}(c) \neq \emptyset$ é compacto.

Primeiramente, fixe $c \in \mathbb{R}$ tal que $L(c) \neq \emptyset$ (por exemplo, tomando $c = f(x,y)$ para um $(x,y) \in D$ qualquer). Vejamos agora os seguintes fatos:

(i) <u>$L(c)$ é limitado</u>;

Suponha, por contradição, que $L(c)$ seja ilimitado, isto é, que exista $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c)$ tal que $\|(x_k, y_k)\| \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$. Temos que $x_k + y_k > 0$, pois $(x_k, y_k) \in D$, e

$$f(x_k, y_k) \leq c, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se $|x_k| \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$, temos

$$c \geq f(x_k, y_k) = {x_k}^2 + y_k + \frac{1}{x_k + y_k} > {x_k}^2 + y_k > {x_k}^2 - x_k = x_k(x_k - 1) \longrightarrow \infty,$$

uma contradição. Portanto, $\{x_k\}$ é limitada.

Agora, se $\{x_k\}$ é limitada, $y_k \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$, e para todo k suficientemente grande, temos

$$c \geq f(x_k, y_k) = {x_k}^2 + y_k + \frac{1}{x_k + y_k} > y_k \longrightarrow \infty \ (k \longrightarrow \infty),$$

uma contradição. Logo, $L(c)$ é limitado.

(ii) <u>$L(c)$ é fechado</u>;

Suponha, por contradição, que $L(c)$ não seja fechado, isto é, que exista $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c)$ tal que $\{(x_k, y_k)\} \longrightarrow (x,y)$ $(k \longrightarrow \infty)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - L(c)$. Sendo f contínua em D, tem-se

$$f(x_k, y_k) \leq c \Rightarrow f(x,y) \leq c.$$

Agora, como $(x,y) \notin L(c)$, devemos ter $(x,y) \in \overline{D} - D$, isto é, $x + y = 0$, mas neste caso

$$c \geq f(x_k, y_k) = {x_k}^2 + y_k + \frac{1}{x_k + y_k} \longrightarrow \infty \ (k \longrightarrow \infty),$$

uma contradição. Logo, $L(c)$ é fechado.

De (i) e (ii), $L(c)$ é compacto, donde segue-se pelo corolário 2.1 que f possui minimizador global em D. ■

Para mostrarmos mais uma aplicação, precisaremos da seguinte definição:
Uma sequência $\{(x_k, y_k)\} \subset \mathbb{R}^2$ é dita ***sequência crítica*** em relação ao conjunto D, se $\{(x_k, y_k)\} \subset D$ e ou $\|(x_k, y_k)\| \longrightarrow \infty$ ou $\{(x_k, y_k)\} \longrightarrow (x,y) \in \overline{D} - D$ $(k \longrightarrow \infty)$. Além disso, dizemos que uma função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é ***coerciva*** no conjunto D, quando para toda sequência $\{(x_k, y_k)\}$ crítica em relação a D, tem-se $\lim_{k \to \infty} \sup f(x_k, y_k) = \infty$.

<u>Exemplo 2.3</u>: A função dada pela Aplicação 2.1 é coerciva sobre D.

<u>Exemplo 2.3</u>: A função $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$, não é coerciva sobre $(0,\infty) \times (0,\infty)$. No entanto, a mesma é coerciva sobre o conjunto $]0,t] \times]0,t]$, para $t > 0$ fixo qualquer.

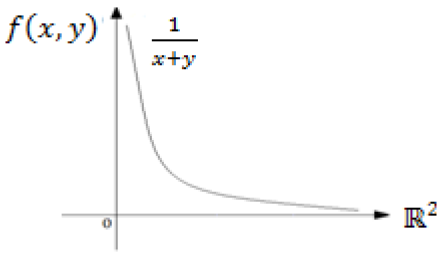

Figura 2.2

Exemplo 2.3: $f(x,y) = (x+y)^2 + \frac{1}{x+y}$ é coerciva em $]0,\infty] \times]0,\infty]$.

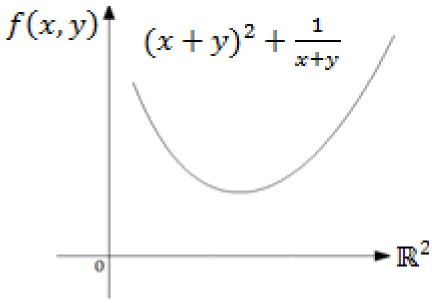

Figura 2.3

Observemos que quando D é limitado, coercividade de f em D significa que $(x_k, y_k) \in D$ e $\{(x_k, y_k)\} \longrightarrow (x,y) \in \overline{D} - D$, tem-se que $\lim_{k\to\infty} \sup f(x_k, y_k) = \infty$. Quando D é fechado, coercividade de f em D significa que $(x_k, y_k) \in D$ e $\|(x_k, y_k)\| \longrightarrow \infty$ implicam $\lim_{k\to\infty} \sup f(x_k, y_k) = \infty$. Finalmente, quando D é compacto, não há sequências críticas, já que toda sequência em D é limitada e o fato de D ser fechado implica $\overline{D} = D$, ou seja, $\overline{D} - D = \emptyset$. Portanto, por vacuidade, se D é compacto, qualquer função $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ é coerciva.

Aplicação 2.2: Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua coerciva em $D = \emptyset$. Afirmamos que o problema de minimizar f em D possui uma solução global.

Fixemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $L(c) = L_{f,D}(c) \neq \emptyset$ (por exemplo, tomando $c = f(x,y)$ para um $(x,y) \in D$ qualquer). Verificaremos que $L(c)$ é compacto e aplicaremos o corolário 2.1. Suponhamos primeiro que $L(c)$ seja ilimitado, isto é que exista $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c)$ tal que $\|(x_k, y_k)\| \longrightarrow \infty$. Assim, como $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c) \subset D$ e $\|(x_k, y_k)\| \longrightarrow \infty$, então $\{(x_k, y_k)\}$ é crítica em relação a D, e como f é coerciva no conjunto D, tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \sup f(x_k, y_k) = \infty.$$

Temos também que $f(x_k, y_k) \leq c, \forall k \in \mathbb{N}$. Passando o $\lim_{k\to\infty} sup$ nesta última desigualdade, temos que

$$c \geq \lim_{k\to\infty} sup\ f(x_k, y_k) = \infty,$$

o que é absurdo. Portanto, $L(c)$ é limitado.

Suponhamos agora que $L(c)$ não seja fechado, isto é, que exista $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c)$ tal que $\{(x_k, y_k)\} \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 - L(c)$. A função f é contínua em D. Portanto,

$$f(x_k, y_k) \leq c \Rightarrow f(x,y) \leq c,$$

então, como $(x, y) \notin L(c)$, devemos ter $(x, y) \in \overline{D} - D$.

Mas, temos que $\{(x_k, y_k)\} \subset L(c) \subset D$ e $\{(x_k, y_k)\} \longrightarrow (x, y) \in \overline{D} - D$, e assim $\{(x_k, y_k)\}$ é crítica em relação a D.

Como f é coerciva em D, temos então $\lim_{k\to\infty} sup\ f(x_k, y_k) = \infty$, e daí

$$c \geq f(x_k, y_k) \Rightarrow c \geq \lim_{k\to\infty} sup\ f(x_k, y_k) = \infty,$$

o que é absurdo. Logo, $L(c)$ é fechado.

Concluímos então que $L(c)$ é compacto, e assim a existência de minimizador global segue do corolário 2.1. ■

3. Condições de otimalidade para problemas sem restrições.

Consideremos o problema de minimização irrestrita

$$\min f(x, y)\ ;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

A seguir apresentaremos as condições necessárias e suficientes para que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ seja minimizador (local) do problema (3.1). Em seguida, faremos uma aplicação destes resultados.

TEOREMA 3.1 (Condição necessária de primeira ordem): Suponhamos que a função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Se $(\bar{x}, \bar{y})$ é um minimizador local irrestrito de f, então

$$f'(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0). \tag{3.2}$$

Um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ é dito ***estacionário*** (ou *crítico*) para o problema (3.1), se vale a condição (3.2).

TEOREMA 3.2 (Condição necessária de segunda ordem): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Se $(\bar{x}, \bar{y})$ é um minimizador local irrestrito de f no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, então $f''(\bar{x}, \bar{y})$ é semi-definida positiva, isto é,

$$\langle f''(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2) \rangle \geq 0\ ,\ \ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

TEOREMA 1.3.3 (Condição suficiente de segunda ordem): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja duas vezes diferenciável no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Se $(\bar{x}, \bar{y})$ é um ponto estacionário e se a matriz Hessiana de f em $(\bar{x}, \bar{y})$ é definida positiva, isto é,

$$\langle f''(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2) \rangle > 0\ ,\ \forall\ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \tag{3.4}$$

então f satisfaz em torno de $(\bar{x}, \bar{y})$ a condição de crescimento quadrático.

Em particular, $(\bar{x}, \bar{y})$ é minimizador local estrito do problema (3.1).

Aplicação 3.1: Encontremos os minimizadores e maximizadores locais irrestritos da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

É fácil ver que f não é limitada inferiormente e superiormente. Então não há minimizadores ou maximizadores globais. Para obter os pontos estacionários, resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$f_x'(x,y) = 3x^2 - 3y = 0, \qquad f_y'(x,y) = 3y^2 - 3x = 0.$$

As soluções são $(0,0)$ e $(1,1)$. Para encontrar minimizadores e maximizadores locais, usamos as condições de otimalidade de segunda ordem. Observando que

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f''(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

temos que matriz $f''(0,0)$ não é semi-definida positiva e nem semi-definida negativa. Desta forma, utilizando o Teorema 3.2, $(0,0)$ não é minimizador e nem maximizador. Como a matriz $f''(1,1)$ é definida positiva, pelos Teoremas 3.1 e 3.2, o ponto $(1,1)$ é (o único) minimizador local (estrito). Neste caso, f não possui maximizadores.

4. Condições de otimalidade em forma primal para problemas com restrições. O cone tangente.

Consideraremos agora um problema em formato geral

$$\min f(x,y) \ \ sujeito\ a\ (x,y) \in D, \tag{4.1}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto (não-vazio) cuja estrutura por enquanto não é especificada, e $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo.

Dizemos que $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma ***direção viável*** em relação ao conjunto D no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, quando existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\bar{x}, \bar{y}) + t(d_1, d_2) \in D, \ \ \forall t \in [0, \varepsilon].$$

Denotamos por $V_D(\bar{x}, \bar{y})$ o conjunto de todas as direções viáveis em relação ao conjunto D no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$. Um conjunto $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de ***cone*** quando

$$(d_1, d_2) \in K \Rightarrow t(d_1, d_2) \in K, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Dizemos que $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ é uma ***direção tangente*** em relação ao conjunto D no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ quando

$$dist\big((\bar{x}, \bar{y}) + t(d_1, d_2), D\big) = o(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

onde

$$dist\big((x_1, x_2), D\big) = inf_{(y_1, y_2) \in D} \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\|.$$

Denotamos por $T_D(\bar{x}, \bar{y})$ o conjunto de todas as direções tangentes ao conjunto D no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$.

Observamos que, de forma equivalente, o cone tangente pode ser definido como

$$T_D(\bar{x}, \bar{y}) = \left\{ (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall \{t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \{t_k\} \longrightarrow 0^+, \\ \exists \{(d_k^1, d_k^2)\} \subset \mathbb{R}^2, \{(d_k^1, d_k^2)\} \longrightarrow (d_1, d_2), tal\ que \\ (\bar{x}, \bar{y}) + t_k(d_k^1, d_k^2) \in D\ para\ todo\ k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

Outra noção útil (um pouco mais geral do que a do cone tangente) é a do ***cone (tangente) de Bouligand***:

$$B_D(\bar{x},\bar{y}) = \left\{ (d_1,d_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{c} \exists\{t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \{t_k\} \longrightarrow 0^+, \\ \exists\{(d_k^1,d_k^2)\} \subset \mathbb{R}^2, \{(d_k^1,d_k^2)\} \longrightarrow (d_1,d_2), tal\ que \\ (\bar{x},\bar{y}) + t_k(d_k^1,d_k^2) \in D\ para\ todo\ k \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right\}$$

A seguir apresentaremos condições necessárias e suficientes para garantir a existência de uma solução local para o problema (4.1), chamadas ***condição necessária (suficiente) em forma primal***.

TEOREMA 4.1 (Condição necessária em forma primal): Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in D$. Se $(\bar{x},\bar{y})$ é uma solução local do problema (4.1), então

$$\langle f'(\bar{x},\bar{y}), (d_1,d_2) \rangle \geq 0\,, \qquad \forall\ (d_1,d_2) \in B_D(\bar{x},\bar{y}).$$

Além disso, $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ é ponto estacionário do problema (4.1).

Corolário 4.1: Seja $(\bar{x},\bar{y}) \in int\,D$ uma solução local do problema (4.1) tal que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $(\bar{x},\bar{y})$. Então $f'(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$.

TEOREMA 4.2 (Condição suficiente em forma primal): Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in D$. Então

$$\langle f'(\bar{x},\bar{y}), (d_1,d_2) \rangle > 0\,,\ \forall\ (d_1,d_2) \in B_D(\bar{x},\bar{y}) \backslash \{(0,0)\} \tag{4.2}$$

se, e somente se, f satisfaz no conjunto D em torno de $(\bar{x},\bar{y})$ a condição de crescimento linear.

Em particular, $(\bar{x},\bar{y})$ é um minimizador local estrito do problema (4.1).

Em geral, o cone tangente não pode ser usado no lugar do cone de Bouligand na condição suficiente do Teorema 4.2, como mostra a aplicação a seguir.

Aplicação 4.1: Sejam

$$f(x) = -x,\ x \in \mathbb{R},$$

e

$$D = \{0\} \cup \{q^0, q^1, q^2, \dots\},$$

onde $q \in (0,1)$. Consideremos o ponto $\bar{x} = 0 \in D$. Em toda vizinhança de $\bar{x}$ existe $x = q^k \in D$ (tomando k suficientemente grande) com $f(x) = q^k < 0 = f(\bar{x})$. Portanto, $\bar{x}$ não é um minimizador local de f em D.

Como $f'(\bar{x}) = -1$ e $B_D(\bar{x}) = \mathbb{R}_+$, a condição (4.2) não é satisfeita. No entanto, $T_D(\bar{x}) = \{0\}$ e, portanto,

$$f'(\bar{x}).\,d > 0\,, \qquad \forall\ d \in T_D(\bar{x}) \backslash \{0\}$$

vale trivialmente. Isto mostra que $T_D(\bar{x})$ no lugar de $B_D(\bar{x})$ em (4.2) não é suficiente para a otimalidade.

Proposição 4.1 (Relações entre as direções viáveis, tangentes e de Bouligand): Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto qualquer e $(\bar{x},\bar{y}) \in D$. Então os cones $T_D(\bar{x},\bar{y})$ e $B_D(\bar{x},\bar{y})$ são fechados e tem-se que

$$\{(0,0)\} \subset \overline{V_D(\bar{x},\bar{y})} \subset T_D(\bar{x},\bar{y}) \subset B_D(\bar{x},\bar{y}).$$

5. Problemas com restrição de igualdade

Nesta seção estudaremos o problema de otimização com restrições de igualdade:

$$\begin{cases} \min f(x,y) \;\; sujeito\ a\ (x,y) \in D \\ D = \{(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \,|\, h(x,y) = 0\} \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

Proposição 5.1: Apenas as direções que pertencem ao subespaço

$$\ker h'(\bar{x},\bar{y}) = \left\{(d_1,d_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle h'(\bar{x},\bar{y}),(d_1,d_2)\rangle = 0\right\}$$

podem ser tangentes em relação ao conjunto D dado por (5.1).

Proposição 5.2: Suponhamos que a função $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in D$, onde D é dado por (5.1). Então

$$B_D(\bar{x},\bar{y}) \subset \ker h'(\bar{x},\bar{y}). \tag{5.2}$$

Em geral, não há igualdade na relação (5.2). Para conseguir uma descrição precisa (isto é, uma igualdade nesta relação), necessitamos de algumas hipóteses adicionais. Em particular, provaremos essa igualdade quando qualquer uma das seguintes condições é satisfeita:

- $\{h_1'(\bar{x},\bar{y}), h_2'(\bar{x},\bar{y})\}$ é um conjunto linearmente independente, ou (5.3)
- h é uma função afim, isto é, $h(x,y) = A(x,y) - a\ ,\ onde\ A \in \mathbb{R}(1,2)\ e\ a \in \mathbb{R}$. (5.4)

As mesmas são chamadas de ***condições de regularidade das restrições*** do problema (5.1).

TEOREMA 5.1 (Teorema do Subespaço Tangente): Suponhamos que $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável numa vizinhança do ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in D$, onde D é dado por (5.1), e que a derivada de h seja contínua em $(\bar{x},\bar{y})$. Então

(a) $B_D(\bar{x},\bar{y}) \subset \ker h'(\bar{x},\bar{y})$.

(b) Quando a condição de regularidade das restrições (2.4) de independência linear dos gradientes das restrições é satisfeita, tem-se que

$$T_D(\bar{x},\bar{y}) = B_D(\bar{x},\bar{y}) = \ker h'(\bar{x},\bar{y}).$$

(c) Quando as restrições são lineares, isto é, vale (2.5), tem-se que

$$V_D(\bar{x},\bar{y}) = T_D(\bar{x},\bar{y}) = B_D(\bar{x},\bar{y}) = \ker h'(\bar{x},\bar{y}).$$

TEOREMA 5.2 (Condição necessária em forma primal): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e que $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável numa vizinhança deste ponto, com derivada contínua em $(\bar{x},\bar{y})$. Assuma ainda que $(\bar{x},\bar{y})$ seja um minimizador local do problema (5.1).

Se vale uma das condições de regularidade das restrições, então

$$\langle f'(\bar{x},\bar{y}),(d_1,d_2)\ \rangle = 0\ ,\ \ (d_1,d_2) \in \ker h'(\bar{x},\bar{y}).$$

Chamamos de função ***Lagrangiana*** associada ao problema (5.1), a função $L: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$L\big((x,y),\lambda\big) = f(x,y) + \langle \lambda, h(x,y) \rangle, \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Observe que

$$L'_{(x,y)}\big((x,y),\lambda\big) = f'(x,y) + \lambda h'(x,y)$$

e

$$L'_{\lambda}\big((x,y),\lambda\big) = h(x,y).$$

TEOREMA 5.3 (Condições de otimalidade de Lagrange): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e que $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seja diferenciável numa vizinhança deste ponto, com derivada contínua em $(\bar{x},\bar{y})$. Suponhamos também que $(\bar{x},\bar{y})$ seja um minimizador local do problema (5.1).

Se vale uma das condições de regularidade das restrições, então existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que

$$L'_{(x,y)}\left((\bar{x},\bar{y}),\bar{\lambda}\right) = (0,0). \tag{5.5}$$

Sob a condição (5.3), $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ satisfazendo (5.5) é único.

Dizemos que um ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ é um ***ponto estacionário*** do problema (5.1), se $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ e (5.5) é satisfeito para algum $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. Este $\bar{\lambda}$ se chama ***multiplicador de Lagrange***, associado ao ponto estacionário $(\bar{x},\bar{y})$.

O sistema de equações

$$\begin{cases} L'_{(x,y)}\big((x,y),\lambda\big) = (0,0) \\ \qquad h(x,y) = 0 \end{cases}$$

em relação à $\big((x,y),\lambda\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, que caracteriza os pontos estacionários do problema (5.1) e os multiplicadores de Lagrange associados, se chama o ***sistema de Lagrange***. De forma equivalente, este sistema pode ser escrito como

$$L'\big((x,y),\lambda\big) = 0,$$

onde a derivada é em relação a todas as variáveis da Lagrangiana, e o 0 representa o elemento nulo de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Aplicação 5.1: Encontremos os minimizadores e maximizadores da função

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y$$

restrito à esfera

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}.$$

Como D é um conjunto compacto e f uma função contínua, pelo Teorema de Weierstrass temos que existem maximizadores e minimizadores globais para o problema. Seja $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Neste caso,

$$h^{'}(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0), \forall (x,y) \in D.$$

Concluímos que todos os pontos viáveis são regulares, no sentido que satisfazem a condição de qualificação das restrições (o conjunto $\{h^{'}(x,y)\}$ é linearmente independente).
A Lagrangiana do problema é

$$L\big((x,y),\lambda\big) = \frac{x^3}{3} + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, \lambda \in \mathbb{R}$$

e o sistema de Lagrange é dado por

$$\begin{cases} L^{'}_x\big((x,y),\lambda\big) = x^2 + 2\lambda x = 0, \\ L^{'}_y\big((x,y),\lambda\big) = 1 + 2\lambda y = 0, \\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Há duas possibilidades. Se $x = 0$, a terceira equação implica que $y = \pm 1$, e a segunda que $\lambda = \mp \frac{1}{2}$. Se temos $x \neq 0$, das primeiras duas equações obtemos $x = -2\lambda$ e $y = -1/(2\lambda)$. Substituindo estes valores na terceira equação obtemos que

$$(2\lambda)^2 + \frac{1}{(2\lambda)^2} = 1.$$

É fácil verificar que a última equação não possui soluções reais em λ. Por isso o segundo caso não fornece pontos estacionários.

Concluímos então que o problema tem dois pontos estacionários: $(0,1)$ e $(0,-1)$. Comparando os valores da função objetivo nestes dois pontos (os únicos candidatos a mínimo/máximo local/global, sendo que ambos existem), vemos que $(0,1)$ é o maximizador global, enquanto $(0,-1)$ é o minimizador global.

6. Condições de otimalidade de segunda ordem

Seja $(\bar{x},\bar{y}) \in D$ um ponto estacionário, denotamos por

$$M(\bar{x},\bar{y}) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid L^{'}_{(x,y)}\big((\bar{x},\bar{y}),\lambda\big) = (0,0)\}$$

o conjunto de multiplicadores de Lagrange associados à $(\bar{x},\bar{y})$.

TEOREMA 6.1 (Condição necessária de segunda ordem): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sejam duas vezes diferenciáveis no ponto $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Suponhamos também que $(\bar{x},\bar{y})$ seja um minimizador local do problema (5.1). Se uma das condições de regularidade das restrições é satisfeita, então para todo $\bar{\lambda} \in M(\bar{x},\bar{y})$ (este $\bar{\lambda}$ é único no caso da condição satisfeita ser a (2.4)), temos o seguinte:

$$\langle L^{''}((\bar{x},\bar{y}),\lambda)(d_1,d_2),(d_1,d_2)\,\rangle \geq 0\,,\ \ \forall\,(d_1,d_2) \in \ker h^{'}(\bar{x},\bar{y}). \qquad (2.7)$$

onde $L^{''}((\bar{x},\bar{y}),\lambda)$ significa derivar $L((x,y),\lambda)$ duas vezes com relação à (x,y) e aplicar no ponto $(\bar{x},\bar{y})$.

TEOREMA 6.2 (Condição suficiente de segunda ordem): Suponhamos que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sejam duas vezes diferenciáveis no ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Assuma que $(\bar{x}, \bar{y})$ seja um minimizador local do problema (5.1). Se $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ e

$$\forall\ (d_1, d_2) \in \ker h^{'}(\bar{x}, \bar{y}) \setminus \{(0,0)\},\ \ \exists \lambda \in M(\bar{x}, \bar{y})$$

tal que

$$\langle L^{''}((\bar{x}, \bar{y}), \lambda)(d_1, d_2), (d_1, d_2)\ \rangle > 0, \tag{6.1}$$

então f satisfaz em torno de $(\bar{x}, \bar{y})$ a condição de crescimento quadrático.

Em particular, $(\bar{x}, \bar{y})$ é um minimizador local estrito do problema (5.1). Reciprocamente, se uma das condições de regularidade das restrições é satisfeita e vale a condição de crescimento quadrático, então a condição (6.1) é satisfeita.

Aplicação 6.1: Considere

$$f(x, y) = -x^2 - y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

e

$$h(x, y) = (xy, x^2 - y^2),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Como o problema (5.1) associado a estas funções dadas possui o único ponto viável $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$, este ponto é a solução. Note que

$$f^{'}(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0),\ h^{'}(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0),\ M(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{R}^2 \text{ e } \ker h^{'}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{R}^2.$$

Temos ainda que

$$\langle h_1^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle = 2d_1 d_2$$

ou

$$\langle h_2^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle = 2({d_1}^2 - {d_2}^2),$$

Ou seja, temos que para todo $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, um destes dois produtos internos é não-nulo. Assim, existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\bar{\lambda}_1 \langle h_1^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle + \bar{\lambda}_2 \langle h_2^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle > 0.$$

Logo, escolhendo $t > 0$ suficientemente grande, podemos garantir a desigualdade

$$\langle L^{''}((\bar{x}, \bar{y}), \bar{\lambda})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\ \rangle =\ \langle f^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\ \rangle + t\bar{\lambda}_1 \langle h_1^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle$$

$$+ t\bar{\lambda}_1 \langle h_1^{''}(\bar{x}, \bar{y})(d_1, d_2), (d_1, d_2)\rangle > 0.$$

Em particular, a desigualdade em (6.1) vale para $\lambda = t\bar{\lambda}$ (que depende de $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

Cabe observar que a matriz

$$L''((\bar{x},\bar{y}),\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} -2(1-\lambda_2) & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -2(1+\lambda_2) \end{pmatrix}$$

não é definida positiva (e nem semi-definida positiva) para nenhum $\lambda \in \mathbb{R}^2$. Portanto, não há multiplicador $\lambda \in M(\bar{x},\bar{y})$ que satisfaz a desigualdade em (2.14) para todo $(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$.

Aplicação 6.2: Entre todos os triângulos de perímetro fixo, encontremos aquele que tem maior área.

Podemos escrever este problema na forma (5.1) (adaptado de forma que estaremos à procura de um maximizador), com

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, \\ D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x+y+z = 2p\}. \end{cases}$$

onde $f(x,y,z)$ representa a área do triângulo de perímetro fixo $2p$, dada pela fórmula de Heron e $x,y,z \in \mathbb{R}$ as medidas dos lados do triângulo. Como D é compacto, pelo Teorema de Weierstrass, temos garantida a existência de um maximizador. Definamos h da seguinte forma:

$$h(x,y,z) = x+y+z-2p, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

temos então

$$h'(x,y,z) = (1,1,1), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Logo, a condição de regularidade das restrições (5.3) (adaptada para o $\mathbb{R}^3$) é satisfeita em todo ponto viável.

O sistema de lagrange

$$\begin{cases} L'_{(x,y,z)}\big((x,y,z),\lambda\big) = (0,0,0) \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

tem como única solução

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$$

Utilizando as condições necessárias e suficientes de segunda ordem, vemos que $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ é o maximizador deste problema. Portanto, dentre todos os triângulos de perímetro fixo, o de maior área é o equilátero.

CONCLUSÕES

Através deste estudo, aprendemos algumas técnicas de otimização e condições necessárias e suficientes para se obter solução de um problema de minimização (ou maximização). Com o mesmo pôde-se observar algumas aplicações do Cálculo Diferencial [5], Álgebra Linear [2] e Análise [4].

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela manutenção das bolsas, PIBIC e produtividade em pesquisa; Ao Professor Jefferson Abrantes pela proposta do tema e pelos conhecimentos transmitidos durante a vigência do projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CLARKE, F.H., **Nonsmooth Analysis and Optimization**, Wiley, New York, 1983;

[2] COELHO, F. U. / LOURENÇO, M. L., **Um curso de Álgebra Linear**, Editora USP, São Paulo, 2005.

[3] IZMAILOV, ALEXEY / SOLODOV, MIKHAIL, **Otimização - volume 1. Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e dualidade**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA 2009;

[4] LIMA, E. L., **Análise Real, v.1. Funções de uma variável**. 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008;

[5] LIMA, E. L., **Análise Real, v. 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004;

[6] NOCEDAL, J. / WRIGHT, S.J., **Numerical Optimization***,* Springer Verlag, New York, 1999.